

Charakterisierungen
dualer Banachräume

von
Rudolf Brígola
aus Nürnberg

1981

1982 # 69



Charakterisierungen dualer Banachräume

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Rudolf Brigola
aus Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 13. November 1981

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter:

Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. H. Berens

Charakterisierungen dualer Banachräume

Inhaltsangabe:

i) - v)

Einleitung

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Kapitel 0

Hilfsmittel

0.1 Einige Sätze über die Charakteristik von Teilräumen eines Dualraumes	1
0.2 Einige bekannte Charakterisierungen dualer Banachräume	7
0.3 Einige bekannte Charakterisierungen quasi-reflexiver Räume	11

Kapitel 1

Charakterisierungen dualer und bidualer Banachräume nach Kung Fu Ng

1.1 Isomorphe Charakterisierungen dualer und bidualer Banachräume nach Kung Fu Ng	14
1.2 Eine isometrische Charakterisierung bidualer Banachräume nach Kung Fu Ng	20

Kapitel 2

Charakterisierungen dualer Banachräume durch eine verallgemeinerte

<u>Banach-Saks-Eigenschaft</u>	24
2.1 Eine isomorphe und eine isometrische Charakterisierung separabler Dualräume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft	25
2.2 Isomorphe und isometrische Charakterisierungen separabler Bidualräume und quasi-reflexiver Räume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft	33
2.3 Äquivalenz von w^* -Kompaktheit, w^* -Folgenkompaktheit, w^* -abzählbar-Kompaktheit und verallgemeinerter Banach-Saks-Eigenschaft in Dualräumen mit glattem Präduale	38

Kapitel 3

Charakterisierungen dualer Banachräume durch stetige Operatoren

<u>(Umkehrung eines Satzes von R. Schatten)</u>	44
---	----

Kapitel 4

Charakterisierungen der Schur-Eigenschaft durch Operatorenideale

4.1 Charakterisierungen der Banachräume mit Schur-Eigenschaft	51
4.2 Charakterisierungen der Dualräume und Bidualräume mit Schur-Eigenschaft und einige Folgerungen	52
	60

Anhang 1

Banach-Mazur-Zahlen für duale und biduale Banachräume	67
---	----

Anhang 2

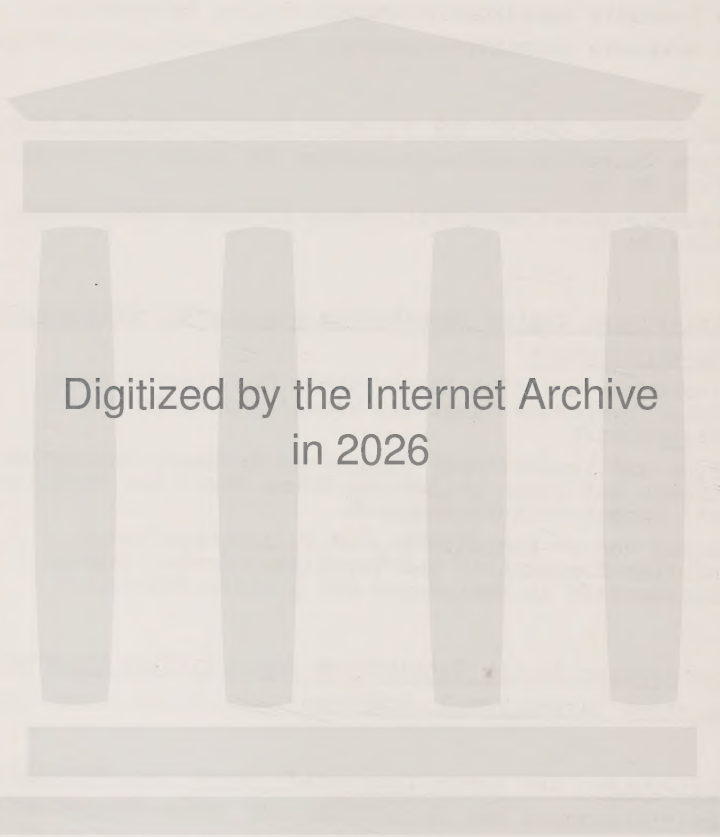
Einige offene Probleme über duale und biduale Banachräume	72
---	----

Anhang 3

Ergänzende Hinweise	75
---------------------	----

Literaturverzeichnis

76



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546215_0083

Einleitung

Die vorliegende Arbeit enthält einige neue Charakterisierungen folgender Eigenschaften von Banachräumen:

Dualraum, Bidualraum, Quasi-Reflexivität und Schur-Eigenschaft.

Auf der Grundlage der Arbeiten von J. Dixmier [1] und I. Singer [1] - [3], deren wichtigste Ergebnisse wir in Kapitel 0 zusammenfassen, beweisen wir in Kapitel 1 folgende isomorphe Charakterisierung dualer Banachräume nach Kung Fu Ng [1], die auf dessen isometrischer Charakterisierung dualer Banachräume aufbaut:

Ein Banachraum X ist genau dann isomorph zu einem Dualraum, wenn eine hausdorffsche, lokalkonvexe Topologie τ auf X existiert, so daß die Einheitskugel von X relativ kompakt bzgl. τ ist.

Hieran anschließend zeigen wir eine analoge isomorphe Charakterisierung bidualer Banachräume. Aus dieser folgern wir einerseits eine isometrische Charakterisierung bidualer Banachräume, welche die Charakterisierung von G. Crofts [1] verschärft, sowie andererseits die isomorphe Charakterisierung bidualer Räume von P. Civin und B. Yood [1] und eine isometrische Variante hierzu.

In Kapitel 2 geben wir eine isomorphe Charakterisierung reeller, separabler Dualräume durch eine Summierbarkeitsbedingung für beschränkte Folgen. Einer Idee von T. Nishiura und D. Waterman [1] folgend, definieren wir:

Ein reeller, hausdorffscher, lokalkonvexer Raum (X, τ) besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft, wenn zu jeder beschränkten Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine reguläre, wesentlich positive Summierungsmethode T existieren, so daß die T -Mittel der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. τ existieren und konvergieren.

Eine speziellere Summierbarkeitsbedingung wurde von T. Nishiura - D. Waterman [1], I. Singer [6] und A. Pelczynski [1] benutzt, um reflexive Banachräume zu charakterisieren. Wir erhalten folgende isomorphe Charakterisierung reeller, separabler Dualräume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft:

Für jeden reellen, separablen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit positiver Charakteristik, so daß X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. der V -Topologie besitzt.

Aus Bedingung 2) folgt, daß X kanonisch isomorph zu V' ist.

Aufgrund der Ergebnisse von Kapitel 1 erhalten wir hieraus neben der zugehörigen isometrischen Charakterisierung dualer Banachräume analoge isomorphe und isometrische Charakterisierungen separabler Bidualräume und quasi-reflexiver Räume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft, welche das Resultat von T. Nishiura und D. Waterman [1] einschließen.

Der bekannte Satz von R. C. James [2], welcher reelle, reflexive Räume dadurch charakterisiert, daß jedes stetige Funktional auf X seine Norm auf der Einheitskugel annimmt, wurde von C. De Vito [1] zu einer Charakterisierung reeller, separabler Dualräume verallgemeinert. Wir zeigen an einem Beispiel, daß eine entsprechende Aussage für nicht-separable Banachräume i.a. nicht mehr gilt.

J. Hagler und F. Sullivan [1] bewiesen, daß für glatt normierte Banachräume die duale Einheitskugel schwach*-folgenkompakt ist. Wir geben mit Hilfe eines Satzes von E. Bishop und R. Phelps [1] folgende Erweiterung des Resultates von J. Hagler und F. Sullivan [1]:

Seien X ein reeller Banachraum und V ein glatt normierter, abgeschlossener Teilraum von X' mit positiver Charakteristik. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist kanonisch isomorph zu V' .
- 2) Die Einheitskugel von X ist relativ kompakt bzgl. der V -Topologie.
- 3) Die Einheitskugel von X ist relativ folgenkompakt bzgl. der V -Topologie.
- 4) Die Einheitskugel von X ist relativ abzählbar kompakt bzgl. der V -Topologie.
- 5) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. der V -Topologie.
- 6) Jedes Funktional aus V nimmt seine Norm auf der Sphäre

$$S_V(X) = \{x \in X : \sup_{f \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = 1\} \text{ an.}$$

Neben dem zugehörigen isometrischen Satz ergibt sich hieraus die Reflexivität z. B. von Dualräumen mit Frechet-differenzierbarer Norm oder von schwach lokal gleichmäßig konvexen Bidualräumen.

In Kapitel 3 werden durch Ergänzung eines Satzes von R. Schatten [1] isomorphe und isometrische Charakterisierungen dualer Banachräume anhand stetiger Operatoren gegeben. Die isometrische Charakterisierung lautet wie folgt:

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß der Raum $L(X)$ der stetigen, linearen Operatoren auf X kanonisch isometrisch zum Dualraum des projektiven Tensorproduktes $X \otimes V$ ist.

Der Satz von R. Schatten [1] besagt, daß 2) aus 1) folgt. Hier wird die Umkehrung bewiesen, mit Hilfe der Resultate von J. Dixmier [1] und I. Singer [3]. Genauer gesagt folgt aus 2), daß X kanonisch isometrisch zu V' ist.

Die in Kapitel 2 benutzten regulären Summierungsmethoden sind Spezialfälle allgemeinerer konvergenz-erhaltender Summierungsmethoden. Eine Charakterisierung konvergenz-erhaltender und konvergenz-erzeugender Summierungsmethoden von J. Schur [1] hat zur unmittelbaren Folge, daß für jede Menge A jede schwach-konvergente Folge in $l_1(A)$ bereits norm-konvergent ist.

In Kapitel 4 charakterisieren wir diese sog. Schur-Eigenschaft, die eng mit der Dunford-Pettis-Eigenschaft und der Fastreflexivität eines Banachraumes zusammenhängt.

Nach A. Grothendieck [2] besitzt ein Banachraum X genau dann die Dunford-Pettis-Eigenschaft, wenn jeder schwach-kompakte, lineare Operator von X in einen beliebigen Banachraum Y bereits vollstetig ist. Wir zeigen mit Hilfe des Faktorisierungslemmas von W.J.Davis, T.Figiel, W.B.Johnson und A.Pelczynski [1] folgende analoge Charakterisierung der Banachräume mit Schur-Eigenschaft:

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) Jeder schwach-kompakte, lineare Operator von einem beliebigen Banachraum Y nach X ist vollstetig.
- 3) Jeder schwach-kompakte, lineare Operator von einem beliebigen Banachraum Y nach X ist kompakt.

Aufgrund der Arbeiten von H. Fakhoury [1] und J. Howard [1] erhalten wir hiermit weitere Charakterisierungen der Banachräume X mit Schur-Eigenschaft mittels der Operatorklassen $wC(Y, X)$ der schwachen Cauchy-Operatoren von einem Banachraum Y nach X , und $M(Y, X)$ der Operatoren von Y nach X , die durch einen fastreflexiven Raum faktorisieren. Außerdem geben wir folgende Charakterisierung der Dualräume mit Schur-Eigenschaft:

Ein Banachraum X sei isomorph zu einem Dualraum Y' . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) Jeder schwach-kompakte, lineare Operator von Y in einen beliebigen Banachraum ist kompakt.

Als Folgerung hieraus erhalten wir aufgrund der Charakterisierung fastreflexiver Banachräume von H. P. Rosenthal [1] und L. Dor [1] die Charakterisierung dualer Banachräume mit Schur-Eigenschaft von H. Fakhoury [1] und P. Pethe - N. Thakare [1].

Ferner zeigen wir, daß es keine unendlich-dimensionalen Bidualräume mit Schur-Eigenschaft gibt, und verschärfen damit zwei Ergebnisse von J. Howard [1] und H. Fakhoury [1].

Schließlich ergeben sich aus den Charakterisierungen der Dualräume und Bidualräume mit Schur-Eigenschaft unmittelbar 1. das von T. E. Armstrong [1] mit maßtheoretischen Mitteln bewiesene Resultat, daß kein Raum $l_1(A)$ für eine unendliche Menge A isomorph zu einem Bidualraum ist, 2. die bekannten Tatsachen, daß $c_0(\mathbb{N})$, $C([0,1])$ und $L^1([0,1])$ nicht isomorph zu Dualräumen sind, sowie 3. das in Kapitel 2 benutzte Beispiel, daß $l_1([0,1])$ nicht isomorph zum Dualraum von $C([0,1])$ ist.

In Anhang 1 führen wir eine Banach-Mazur-Zahl für duale Banachräume ein. Für einen Banachraum X , welcher isomorph zu einem Dualraum ist, bedeutet diese Banach-Mazur-Zahl seinen Banach-Mazur-Abstand zur Klasse derjenigen Banachräume, die isometrisch zu einem Dualraum sind. Wir geben die Banach-Mazur-Zahl eines dualen Banachraumes X mittels der Normen stetiger Projektionen von X'' auf X an. Für eine entsprechende Banach-Mazur-Zahl bidualer Banachräume geben wir eine Abschätzung. In Anhang 2 formulieren wir einige offene Probleme über duale und biduale Banachräume.

An dieser Stelle möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow, für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit herzlich danken.

Verzeichnis der verwendeten Symbole und Abkürzungen

Es bedeutet:

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_+$	die Menge der nicht negativen reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen,
$\mathbb{K}$	den Körper der reellen oder komplexen Zahlen,
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	den Limes inferior einer beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen,
$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$	den Limes superior einer beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen,

Seien X ein normierter Raum, E ein Teilraum von X , und V ein Teilraum des Dualraumes X' von X . Dann bedeutet:

$E^\perp$	den Annihilator von E ,
$V_\perp$	den Präannihilator von V ,
$b_1(X)$	die abgeschlossene Einheitskugel von X ,
$S_1(X)$	die Einheitssphäre von X .

Weiter bedeute:

$c_0(\mathbb{N}) = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$	den Banachraum der Nullfolgen in $\mathbb{K}$,
$l_1(\mathbb{N}) = l_1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$	den Banachraum der absolut-summierbaren Folgen in $\mathbb{K}$,
$l_1(A) = l_1(A, \mathbb{K})$	den Banachraum der absolut-summierbaren, $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf der Menge A ,
$l_\infty(A) = l_\infty(A, \mathbb{K})$	den Banachraum der beschränkten, $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf der Menge A ,
$l_2(n)$	den Raum $\mathbb{K}^n$, versehen mit der euklidischen Norm,
$C(T) = C(T, \mathbb{K})$	den Banachraum der $\mathbb{K}$ -wertigen, stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum T ,

$$L^1([0,1])=L^1([0,1],\mathbb{K})$$

den Banachraum der $\mathbb{K}$ -wertigen, Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$,

$$L^\infty([0,1])=L^\infty([0,1],\mathbb{K})$$

den Banachraum der $\mathbb{K}$ -wertigen, fast-überall bzgl. des Lebesgue-Maßes beschränkten Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$.

An logischen Symbolen verwenden wir:



den Allquantor,



den Existenzquantor,



den Existenz- und Eindeutigkeits-Quantor.

Kapitel 0

Hilfsmittel

In diesem einführenden Kapitel fassen wir einige grundlegende Definitionen und für das Folgende wichtige Tatsachen zusammen. Im ersten Abschnitt stehen die Beziehungen zwischen der Charakteristik eines Teilraumes eines dualen Banachraumes und einer von ihm erzeugten Halbnorm im Mittelpunkt der Betrachtung. Die meisten der Ergebnisse dieses ersten Abschnittes findet man in den Arbeiten von J. Dixmier [1] und I. Singer [1] - [3] .

Im zweiten Abschnitt wiederholen wir einige bekannte Charakterisierungen dualer Banachräume, soweit sie für die folgenden Kapitel nötig sind. Diese Ergebnisse entstammen wieder den bereits zitierten Arbeiten von J. Dixmier und I. Singer, sowie den Arbeiten von A. F. Ruston [1] und Kung Fu Ng [1] . Wir schließen dieses Kapitel mit einem dritten Abschnitt, in dem wir kurz einige Charakterisierungen quasi-reflexiver Banachräume von P. Civin - B. Yood [1] und I. Singer [4] - [5] wiederholen, auf die wir ebenfalls später Bezug nehmen.

0.1 Einige Sätze über die Charakteristik von Teilräumen eines Dualraumes

Ist X ein normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen, so bezeichne X' seinen topologischen Dualraum.

(0.1.1) Definition

Seien X ein normierter Raum und V ein Teilraum von X' .

- 1) Die größte Topologie auf X , für die alle $f \in V$ stetig sind, heißt V-Topologie auf X (i. Z. $\sigma(X, V)$).
- 2) V heißt total in X' , wenn V die Punkte von X trennt.
- 3) Die Abbildung $J_{X, V} \in L(X, V')$ sei definiert durch:

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \swarrow \\ x \in X & & f \in V \end{array} \quad J_{X, V}(x)(f) := f(x)$$

(0.1.2) Bemerkungen

Seien X ein normierter Raum und V ein Teilraum von X' .

- 1) V ist genau dann total, wenn $\sigma(X, V)$ hausdorffsch ist.
Dies ist genau dann der Fall, wenn $J_{X, V}$ injektiv ist.
In diesem Fall ist X mit der V -Topologie ein hausdorffscher, lokalkonvexer Raum, der als Dualraum gerade V besitzt.
- 2) Es gilt $\|J_{X, V}\| \leq 1$, und $J_{X, V}$ ist stetig, wenn man X und $V^{(1)}$ mit den V -Topologien versieht. Ist $J_{X, V}$ ein Isomorphismus, so auch ein Homöomorphismus, wenn X und V' mit den V -Topologien versehen sind.
- 3) $J_{X, V}(X)$ ist ein totaler Teilraum von V' . Die $J_{X, V}(X)$ -Topologie auf V stimmt mit der von $\sigma(X', X)$ auf V induzierten Topologie überein, und wird kurz mit $\sigma(V, X)$ bezeichnet.
- 4) Für zwei totale Teilräume W_1 und W_2 von X' fallen die Topologien $\sigma(X, W_1)$ und $\sigma(X, W_2)$ auf der abgeschlossenen Einheitskugel $b_1(X)$ von X genau dann zusammen, wenn die Norm-Abschlüsse von W_1 und W_2 in X' zusammenfallen.

¹⁾ V' bezeichne den Dualraum des normierten Raumes V .

Die folgende Definition der Charakteristik eines Teilraumes V eines Dualraumes X' findet man für Banachräume X in der grundlegenden Arbeit von J. Dixmier [1]. Da in ihr die Vollständigkeit von X keine Rolle spielt, verlangen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen nur, daß X ein normierter Raum ist. Die Untersuchungen der von V erzeugten Halbnorm $\| \cdot \|_V$ auf X gehen auf I. Singer [1] zurück.

Für einen normierten Raum X und $r \in \mathbb{R}_+$ seien im folgenden stets $b_r(X) := \{ x \in X : \|x\| \leq r \}$ und $S_r(X) := \{ x \in X : \|x\| = r \}$.

(0.1.3) Definition (J. Dixmier [1], I. Singer [1])

Seien X ein normierter Raum, V ein Teilraum von X' , und $x \in X$.

- 1) Die Charakteristik von V sei definiert als

$$\text{char}(V) := \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ : b_r(X') \subset (V \cap b_1(X')) \}^{\sigma(X', X)}.$$
- 2) $\|x\|_V := \sup \{ |f(x)| : f \in b_1(V) \}.$

(0.1.4) Lemma (I. Singer [1])

Seien X ein normierter Raum und V ein Teilraum von X' .

Dann gelten folgende Aussagen:

- 1) $b_V(X) := \{ x \in X : \|x\|_V \leq 1 \}$ ist abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, V)$, und $b_1(X)$ ist dicht in $b_V(X)$ bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 2) Ist $A \subset X$ beschränkt bzgl. der Halbnorm $\| \cdot \|_V$, so ist A beschränkt bzgl. $\sigma(X, V)$. Ist V ein abgeschlossener Teilraum von X' , so ist eine Teilmenge A von X genau dann beschränkt bzgl. $\sigma(X, V)$, wenn A bzgl. der Halbnorm $\| \cdot \|_V$ beschränkt ist.

Zwischen der Charakteristik eines Teilraumes V von X' und der Halbnorm $\| \cdot \|_V$ besteht folgende Beziehung, die zuerst von J. Dixmier für den Fall von Banachräumen X bewiesen wurde. Wir reproduzieren einen kurzen Beweis des Ergebnisses von Dixmier, der von D. van Dulst [1] stammt und zeigt, daß die Vollständigkeit von X hier unwesentlich ist. In dieser Form benötigen wir den folgenden Satz im Beweis von Satz (1.1.4) zur Charakterisierung bidualer Banachräume.

(0.1.5) Satz (J. Dixmier [1])

Sind X ein normierter Raum und V ein Teilraum von X' , so gilt folgende Aussage:

$$\text{char}(V) = \inf \{ \|x\|_V : x \in S_1(X) \}.$$

Beweis: Wir betrachten das Dualsystem (X, X') . Für eine absolut-konvexe, absorbierende Teilmenge A von X bezeichne p_A deren Minkowski-Funktional, und A° ihre Polare.

$$\text{Es ist } \|x\|_V = \sup \{ |f(x)| : f \in b_1(V) \} = p_{b_1(V)}^\circ(x).$$

Mit dem Bipolarensatz erhält man also:

$$\begin{aligned} \inf \{ \|x\|_V : x \in S_1(X) \} &= \inf \{ p_{b_1(V)}^\circ(x) : x \in S_1(X) \} = \\ &= \sup \{ r \geq 0 : r b_1(V)^\circ \subset b_1(X) \} = \\ &= \sup \{ r \geq 0 : b_1(V)^{\circ\circ} \supset r b_1(X') \} = \text{char}(V) \end{aligned}$$

Wir schließen einige Folgerungen an, die sich leicht aus Satz (0.1.5) ergeben; hierzu sei wieder auf die Arbeiten von J. Dixmier [1] und I. Singer [1] verwiesen.

(0.1.6) Satz (J. Dixmier [1], I. Singer [1])

Seien X ein normierter Raum und V ein Teilraum von X' .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $\text{char}(V) > 0$

2) Die Halbnorm $\|\cdot\|_V$ ist eine äquivalente Norm auf X .

3) $b_V(X) := \{x \in X : \|x\|_V \leq 1\}$ ist normbeschränkt in X .

Ist X sogar ein Banachraum, so ist zu den bisherigen Aussagen auch die folgende äquivalent:

4) $J_{X,V}$ ist injektiv und $J_{X,V}(X)$ ist ein norm-abgeschlossener Teilraum von V' .

Ist für einen Banachraum X und einen Teilraum V von X' die

Abbildung $J_{X,V}$ ein Isomorphismus, d. h. ist X kanonisch isomorph zu V' , so sieht man leicht: $\text{char}(V) = \|J_{X,V}^{-1}\|^{-1}$.

In diesem Fall existiert nach A. F. Ruston [1] eine stetige Projektion P von X'' auf $J_{X,X''}(X)$ mit $P^{-1}(0) = V^\perp$. Wir erhalten, daß die Norm von P mit der Norm von $J_{X,V}^{-1}$ zusammenfällt.

(0.1.7) Lemma

Sind X ein Banachraum und V ein Teilraum von X' , so daß die kanonische Abbildung $J_{X,V}$ ein Isomorphismus ist, und ist P die stetige Projektion von X'' auf $J_{X,X''}(X)$ mit $P^{-1}(0) = V^\perp$, dann gilt: $\|P\| = \|J_{X,V}^{-1}\|$.

Beweis:

i) Die Abbildung R von X'' auf V' sei definiert durch:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ F \in X'' \end{array} \quad R(F) := F|_V.$$

Es gilt offensichtlich $\|R\| \leq 1$. Definiert man unter den gegebenen Voraussetzungen $Q := J_{X, X''} \circ J_{X, V'}^{-1} \circ R$, so ist $Q = P$, und es ergibt sich $\|P\| \leq \|J_{X, V'}^{-1}\|$.

ii) Sei dann $F \in V'$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $T \in X''$ von F mit $\|T\| = \|F\|$. Nach Voraussetzung existieren $x_0 \in X$ und $G \in V^+$, so daß

$$T = J_{X, X''}(x_0) + G.$$

$$\text{Also sind } x_0 = J_{X, V'}^{-1}(F) \text{ und } P(T) = J_{X, X''}(x_0).$$

Daher gilt:

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ F \in b_1(V') & & T \in b_1(X'') \end{array} \quad P(T) = J_{X, X''} \circ J_{X, V'}^{-1}(F).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \|J_{X, V'}^{-1}\| &= \sup \{ \|J_{X, X''} \circ J_{X, V'}^{-1}(F)\| : F \in b_1(V') \} \leq \\ &\leq \sup \{ \|P(T)\| : T \in b_1(X'') \} = \|P\|. \end{aligned}$$

$$\text{Somit gilt also } \|P\| = \|J_{X, V'}^{-1}\|.$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit Ergebnissen von

R. C. James [2] - [3] und C. De Vito [1], die wir in Kapitel 2 benötigen, sowie mit einigen Beispielen und Bemerkungen, auf die wir an geeigneter Stelle zurückkommen.

(0.1.8) Satz (R. C. James [2] - [3])

Seien X ein reeller, vollständiger, hausdorffscher, lokal-konvexer Raum und B eine beschränkte Teilmenge von X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) B ist schwach relativ kompakt.
- 2) Zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B und jedem stetigen, linearen Funktional f auf X existiert ein x im schwachen Abschluß von B , so daß $\varliminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x) \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

- 3) Zu jedem stetigen, linearen Funktional f auf X existiert ein x im schwachen Abschluß von B , so daß
- $$f(x) = \sup \{ f(y) : y \in B \}.$$

(0.1.9) Satz (C. De Vito [1])

Seien X ein reeller, separabler Banachraum und V ein abgeschlossener Teilraum von X' mit $\text{char}(V) > 0$. Dann ist X vollständig bzgl. der Mackey-Topologie des Dualsystems (X, V) .

(0.1.10) Beispiele und Bemerkungen

- 1) J. Dixmier [1] gibt ein Beispiel eines totalen, abgeschlossenen Teilraumes V von $l_1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})'$ mit $\text{char}(V) = 0$. W.J. Davis - J. Lindenstrauss [1] zeigen, daß zu jedem Banachraum X , der nicht quasi-reflexiv ist, ein totaler Teilraum V in X' mit $\text{char}(V) = 0$ existiert.
- 2) C. De Vito [1] zeigt: $\text{char}(C([0, 1], \mathbb{R})) = 1$ in $L^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Ebenso gilt: $\text{char}(C([0, 1], \mathbb{R})) = 1$ in $l_\infty([0, 1], \mathbb{R})$.
Denn ist $f \in l_1([0, 1], \mathbb{R})$, so erkennt man
- $$\|f\| = \sup \left\{ \left| \sum_{x \in [0, 1]} f(x)g(x) \right| : g \in A \right\}, \text{ wobei}$$
- $$A = \{g \in l_\infty([0, 1], \mathbb{R}) : \|g\| \leq 1, \text{ supp}(g) \text{ endlich} \}, \text{ und}$$
- hieraus folgt die Behauptung.
- Wir werden später sehen, daß dieses Beispiel zeigt, daß Satz (0.1.9) für nicht-separable Banachräume X i.a. nicht mehr gilt.

0.2. Einige bekannte Charakterisierungen dualer Banachräume

Wir beginnen mit einem bekannten Lemma, welches zeigt, daß man sich bei der Suche nach einem Prädualraum für einen gegebenen Banachraum X auf die Teilräume von X' beschränken kann.

Anschließend wiederholen wir die bekannten isomorphen Charakterisierungen dualer Banachräume von J. Dixmier [1], I. Singer [1] - [3] und A. F. Ruston [1]. Mit den Ergebnissen des ersten Abschnittes erhält man sofort die entsprechenden isometrischen Resultate, die wieder alle den oben zitierten Arbeiten entstammen. Eine weitere isometrische Charakterisierung dualer Banachräume stammt von Kung Fu Ng [1].

(0.2.1) Lemma

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) Es existiert ein Isomorphismus (bzw. eine Isometrie) T von X auf den Dualraum Y' eines Banachraumes Y .
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß die kanonische Abbildung $J_{X,V}$, ein Isomorphismus (bzw. eine Isometrie) von X auf V' ist.

Beweis: Man setzt $V := T^*(J_{Y,Y''}(Y))$.

Sind daher X ein Banachraum und V ein Teilraum von X' , so daß $J_{X,V}$, ein Isomorphismus (bzw. eine Isometrie) von X auf V' ist, so sagen wir, X sei kanonisch isomorph (bzw. kanonisch isometrisch) zu V' .

(0.2.2) Satz (J. Dixmier [1], I. Singer [1] - [3],

A. F. Ruston [1])

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein Teilraum V von X' , so daß die Einheitskugel $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(X,V)$ ist.

- 3) Es existiert ein totaler Teilraum V von X' , so daß die Vervollständigung von $b_1(X)$ bzgl. $\sigma(X, V)$ in X enthalten ist.
 - 4) Es existiert ein Teilraum V von X' mit positiver Charakteristik, so daß kein echter, norm-abgeschlossener Teilraum W von V total in X' ist.
 - 5) Es existiert eine stetige Projektion P von X'' auf $J_{X, X''}(X)$ mit $\sigma(X'', X')$ -abgeschlossenem Kern.
- Ist X ein separabler Banachraum, so ist zu den bisherigen Aussagen auch die folgende äquivalent:
- 6) Es existiert ein totaler Teilraum V von X' , so daß $b_1(X)$ relativ folgenkompakt²⁾ bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.

Zusatz

Gilt Bedingung 5), so ist X kanonisch isomorph zum Dualraum von $P^{-1}(0)_1$.

Die Bedingungen 2)-4) sind äquivalent zu folgender Aussage:
Es existiert ein Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) > 0$, so daß X kanonisch isomorph zu V' ist.

Als Korollar ergeben sich aus Lemma (0.1.4), Satz (0.1.5) und Lemma (0.1.7) folgende isometrischen Charakterisierungen dualer Banachräume:

-
- 2) Ist X ein topologischer Raum, so heiße $A \subset X$ relativ folgenkompakt, wenn zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A eine Teilfolge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in X$ existieren, so daß $x = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$.
Existieren zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A eine Teilfolge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $x \in A$ mit $x = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$, so heißt A folgenkompakt.

(0.2.3) Korollar (J. Dixmier [1], I. Singer [1] - [3],

A. F. Ruston [1])

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein Teilraum V von X' , so daß die Einheitskugel $b_1(X)$ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.
- 3) Es existiert ein totaler Teilraum V von X' , so daß die Einheitskugel $b_1(X)$ vollständig bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.
- 4) Es existiert ein Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) = 1$, so daß kein echter, norm-abgeschlossener Teilraum W von V total in X' ist.
- 5) Es gibt eine stetige Projektion P von X'' auf $J_{X, X''}(X)$ mit $\sigma(X'', X')$ -abgeschlossenem Kern und $\|P\| = 1$.

Ist X separabel, so ist zu den bisherigen Aussagen auch die folgende äquivalent:

- 6) Es existiert ein totaler Teilraum V von X' , so daß $b_1(X)$ folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.

Zusatz

Gilt Bedingung 5), so ist X kanonisch isometrisch zum Dualraum von $P^{-1}(0)_1$.

Die Bedingungen 2)-4) sind äquivalent zu folgender Aussage:

Es existiert ein Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) = 1$, so daß X kanonisch isometrisch zu V' ist.

Der folgende Satz von Kung Fu Ng [1] charakterisiert Banachräume X , die isometrisch zu einem Dualraum sind, durch die Existenz einer geeigneten hausdorffschen, lokalkonvexen Topologie auf X :

(0.2.4) Satz (Kung Fu Ng [1])

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert eine hausdorffsche, lokalkonvexe Topologie τ auf X , so daß die Einheitskugel $b_1(X)$ kompakt bzgl. τ ist.

(0.2.5) Beispiele und Bemerkungen

- 1) Aus der Tatsache, daß $L^1([0,1])$ nicht die Schur-Eigenschaft besitzt, erhalten wir im letzten Kapitel sofort, daß $L^1([0,1])$ nicht isomorph zu einem Dualraum ist.
Ebenso folgt dort aus einer Charakterisierung der Schur-Eigenschaft und der Tatsache, daß $l_1(\mathbb{N})$ diese besitzt, daß $c_0(\mathbb{N})$ und $C([0,1])$ nicht isomorph zu Dualräumen sind.
- 2) $l_1([0,1], \mathbb{R})$ ist nicht isomorph zu $C([0,1], \mathbb{R})'$, wie wir ebenfalls anhand einer Charakterisierung der Dualräume mit Schur-Eigenschaft im letzten Kapitel sofort sehen werden.
- 3) W. J. Davis - W. B. Johnson [1] zeigten, daß jeder nicht-reflexive Banachraum eine äquivalente Norm besitzt, mit welcher er nicht isometrisch zu einem Dualraum ist. Die Eigenschaft eines Banachraumes, isometrisch zu einem Dualraum zu sein, ist daher nicht invariant unter Isomorphismen.

0.3. Einige bekannte Charakterisierungen quasi-reflexiver Räume

Das erste Beispiel eines nicht-reflexiven Banachraumes X , der isometrisch zu seinem Bidual X'' ist, gab R. C. James [1]. Es

handelt sich um einen Banachraum X , dessen kanonisches Bild in X'' die Codimension 1 besitzt. Solche quasi-reflexiven Räume wurden eingehend untersucht z.B. von P. Civin - B. Yood [1], I. Singer [4] - [5] und W. J. Davis - J. Lindenstrauss [1]. Wir fassen einige der wichtigsten Charakterisierungen quasi-reflexiver Räume zusammen, auf die wir in Kapitel 2 Bezug nehmen.

(0.3.1) Definition (P. Civin - B. Yood [1])

Seien X ein Banachraum und $n \in \mathbb{N}_0^{3)}$.

X heißt quasi-reflexiv von der Ordnung n , wenn $\text{codim}_{X''}(X) = n$.

X heißt quasi-reflexiv, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß X quasi-reflexiv von der Ordnung m ist.

(0.3.2) Satz (P. Civin - B. Yood [1], I. Singer [4] - [5])

Seien X ein Banachraum und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist quasi-reflexiv von der Ordnung n .
- 2) X' ist quasi-reflexiv von der Ordnung n .
- 3) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{codim}_{X'}(V) = n$, so daß $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.
- 4) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{codim}_{X'}(V) = n$, so daß $b_1(X)$ relativ abzählbar kompakt⁴⁾ bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.
- 5) Jeder abgeschlossene, separable Teilraum E von X ist quasi-reflexiv von einer Ordnung $\leq n$, und es gibt einen abgeschlossenen, separablen Teilraum E_0 von X , der quasi-reflexiv von der Ordnung n ist.

³⁾ n bezeichnet die Menge $\mathbb{N}_0$

Eine Verallgemeinerung des Beispiels von R. C. James [1] findet man z. B. bei R. Lohmann - P. Cassaza [1], die ein Konstruktionsverfahren für quasi-reflexive Banachräume von der Ordnung 1 angeben.

Ausgehend von den Ergebnissen dieses Kapitels zeigen wir in den nächsten Kapiteln weitere Charakterisierungen dualer, bidualer und quasi-reflexiver Banachräume.

4) Ist X ein topologischer Raum, so heiße $A \subset X$ relativ abzählbar kompakt, wenn jede abzählbare Teilmenge von A einen Häufungspunkt in X besitzt. Besitzt jede abzählbare Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A , so heißt A abzählbar kompakt.

Kapitel 1

Charakterisierungen dualer und bidualer Banachräume nach Kung Fu Ng.

Wir zeigen zunächst eine isomorphe Charakterisierung dualer Banachräume X , die dem isometrischen Satz (0.2.4) von Kung Fu Ng [1] entspricht. Der Beweis dieser Charakterisierung ergibt sich sofort aus Satz (0.2.2) und einer leichten Modifikation des Beweises von Kung Fu Ng für den isometrischen Fall, die darin besteht, daß der hier konstruierte Prädualraum zu X nicht notwendig vollständig ist.

Hierauf aufbauend zeigen wir eine isomorphe Charakterisierung bidualer Banachräume vom Typ des Satzes von Kung Fu Ng.

Hieraus folgern wir erstens eine isometrische Charakterisierung solcher Räume, welche die Charakterisierung bidualer Banachräume von G. Crofts [1] verschärft, und zweitens die isomorphe Charakterisierung bidualer Banachräume von P. Civin-B.Yood [1] und eine isometrische Version hierzu.

1.1 Isomorphe Charakterisierungen dualer und bidualer Banachräume nach Kung Fu Ng

(1.1.1) Satz

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert eine hausdorffsche, lokalkonvexe Topologie τ auf X , so daß die Einheitskugel $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. τ ist.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Nach Satz (0.2.2) existiert ein totaler Teilraum V von X' , so daß $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei $V := (X, \tau)'$. V ist ein Teilraum von X' , da $f(b_1(X))$ für jedes $f \in V$ beschränkt ist. $\sigma(X, V)$ ist hausdorffsch und gröber als τ . Da $b_1(X)$ konvex ist, ist der $\sigma(X, V)$ -Abschluß von $b_1(X)$ gleich dem τ -Abschluß von $b_1(X)$. Wegen der bekannten Minimalitäts-Eigenschaft kompakter Topologien ist dann $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$. Nach Satz (0.2.2) ist daher X kanonisch isomorph zu V' .

(1.1.2) Lemma

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Bidualraum.
- 2) Es gibt einen abgeschlossenen Teilraum E von X , so daß die kanonische Injektion $i: E \rightarrow X$ zu einem Isomorphismus I von E'' auf X fortgesetzt werden kann.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Sei Y ein Banachraum, und $T: X \rightarrow Y''$ ein Isomorphismus. Nach Lemma (0.2.1) sind $V := T^*(J_{Y, Y''}(Y'))$ isomorph zu Y' , und X kanonisch isomorph zu V' .

Sei $E := T^{-1}(J_{Y, Y''}(Y))$; also ist E isomorph zu Y .

Die Abbildung $R: V \rightarrow E'$ sei definiert durch:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ f \in V \end{array} \quad R(f) := f|_E.$$

Die Restriktionsabbildung R ist offensichtlich linear mit $\|R\| \leq 1$.

i) R ist injektiv:

Zu $f \in R^{-1}(0)$ existiert genau ein $g \in Y'$, so daß
 $f = T^*(J_{Y', Y''}(g))$ ist.

Also folgt:

$$\bigwedge_{x \in E} f(x) = J_{Y', Y''}(g)(Tx) = 0$$

Wegen $T(E) = J_{Y, Y''}(Y)$ folgt dann:

$$\bigwedge_{y \in Y} g(y) = 0, \text{ also } g = 0, \text{ und somit } f = 0.$$

ii) R ist surjektiv:

Aus Satz (0.2.2) ergibt sich $Y''' = J_{Y', Y''}(Y') \oplus J_{Y, Y''}(Y)^\perp$.

Da R injektiv ist, gilt $V \cap E^\perp = \{0\}$.

Ist $f \in X' \setminus \{0\}$, so ex. genau ein $F \in Y'''$ mit $Sf = F$
 für $S := (T^*)^{-1}$. Dann existieren eindeutige Elemente

$$F_1 \in J_{Y', Y''}(Y')$$

$$\text{und } F_2 \in J_{Y, Y''}(Y)^\perp \text{ mit } F = F_1 + F_2.$$

Nach Definition von V existiert genau ein

$$f_1 \in V \text{ mit } f_1 = T^*(F_1).$$

Da S ein Isomorphismus von X' auf Y''' ist, existiert genau
 ein $f_2 \in X'$ mit $Sf_2 = F_2$. Wegen $T(E) = J_{Y, Y''}(Y)$ gilt also:

$$\bigwedge_{x \in E} f_2(x) = Sf_2(Tx) = 0.$$

Also ist $f_2 \in E^\perp$ und es folgt:

$$\bigwedge_{x \in X} f(x) = F(Tx) = F_1(Tx) + F_2(Tx) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\text{d. h. } X' = V \oplus E^\perp.$$

Sei jetzt $h \in E'$; nach Hahn-Banach existiert ein $g \in X'$ mit
 $g|_E = h$. Dann existieren $g_1 \in V$, $g_2 \in E^\perp$ mit $g = g_1 + g_2$,
 und aus $R(g_1) = h$ folgt die Surjektivität von R.

Somit ist $J_{X,V'}^{-1} \circ R^*$ ein Isomorphismus von E'' auf X .

Für $x \in E$ und $f \in V$ gilt:

$$R^* x(f) = f(x) = J_{X,V'}(x)(f).$$

Daher ist $J_{X,V'}^{-1} \circ R^*$ eine Fortsetzung der kanonischen Injektion i von E in X .

Aus 2) folgt 1) trivialerweise.

(1.1.3) Bemerkung

- 1) Im Beweis von Lemma (1.1.2) haben wir den Teilraum E von X mit dem Teilraum $J_{E,E''}(E)$ in E'' identifiziert, und erhalten $i = J_{X,V'}^{-1} \circ R^* \circ J_{E,E''}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow J_{E,E''} & \nearrow & \\ E'' & & \end{array} \quad J_{X,V'}^{-1} \circ R^*$$

- 2) Identifiziert man im Beweis von Lemma (1.1.2) den Teilraum E von X mit dem Teilraum $J_{X,V'}(E)$ von V' , so kann man die Restriktionsabbildung $R : V \rightarrow E'$ gerade mit $J_{V,E'}$ identifizieren.

(1.1.4) Satz

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Bidualraum.
- 2) Es existieren ein abgeschlossener Teilraum E von X und eine hausdorffsche, lokalkonvexe Topologie τ auf X , so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) $b_1(X)$ ist relativ kompakt bzgl. τ .

- ii) $b_1(E)$ ist dicht bzgl. τ in einer offenen Kugel von X .
- iii) Kein echter, norm-abgeschlossener Teilraum F von E ist dicht bzgl. τ in X .

Zusatz Bedingung 2) ist genau dann erfüllt, wenn die kanonische Injektion $i : E \rightarrow X$ eine Fortsetzung I von E'' auf X besitzt.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Ist Y ein Banachraum, und $T : X \rightarrow Y''$ ein Isomorphismus, so wählen wir $V := T^*(J_{Y', Y''}(Y'))$ und $E := T^{-1}(J_{Y, Y''}(Y))$ wie in Lemma (1.1.2), und erhalten wie dort, daß X kanonisch isomorph zu V' ist, E isomorph zu Y , und $I = J_{X, V'}^{-1} \circ R^*$ ein Isomorphismus von E'' auf X , wenn R wieder die Restriktion der Funktionale aus V auf E bezeichnet.

Also ist $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\tau = \sigma(X, V)$. Nach Korollar (0.2.3) ist $\text{char}(J_{E, E''}(E)) = 1$ in E'' , und für keinen echten, norm-abgeschlossenen Teilraum F von E ist $J_{E, E''}(F)$ $\sigma(E'', E')$ -dicht in E'' .

Da nun $J_{X, V'}$ ein Homöomorphismus von $(X, \sigma(X, V))$ auf $(V', \sigma(V', V))$ ist, ist $I = J_{X, V'}^{-1} \circ R^* \sigma(E'', E') = \sigma(X, V)$ -stetig, und somit

$$\overline{b_1(E)}^{\sigma(X, V)} = \overline{I(J_{E, E''}(b_1(E)))}^{\sigma(X, V)} \supset I(b_1(E'')).$$

Also gelten ii) und iii).

2) $\Rightarrow$ 1) Sei $V := (X, \tau)'$. Nach Satz (1.1.1) ist X kanonisch isomorph zu V' wegen i). Definiert man $R : V \rightarrow E'$ wieder als die Restriktion der Funktionale aus V auf E , so ist R surjektiv:

Sind nämlich $f \in E' \setminus \{0\}$ und $F := f^{-1}(0)$, so ist F nach Voraussetzung nicht τ -dicht in E . Also existieren $g \in V \setminus \{0\}$ und $x \in E$ mit $F \subset (Rg)^{-1}(0)$ und $Rg(x) \neq 0$. Daher existiert ein $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $Rg = af$. Aus Voraussetzung ii) und der τ -Stetigkeit aller $f \in V$ folgt sofort die Injektivität von R .

Da $\|R\| \leq 1$, bleibt die Stetigkeit von R^{-1} zu zeigen.

Da $\sigma(X, V)$ gröber als τ ist, existiert nach ii) ein $r > 0$ mit $\overline{b_1(E)}^{\sigma(X, V)} \supset b_r(X)$. Also gilt wegen der $\sigma(X, V)$ - $\sigma(V', V)$ -Stetigkeit von $J_{X, V, \cdot}$:

$$\overline{J_{X, V, (b_1(E))}}^{\sigma(V', V)} \supset J_{X, V, (\overline{b_1(E)}^{\sigma(X, V)})} \supset J_{X, V, (b_r(X))}$$

Dies bedeutet aber gerade, daß der Teilraum $J_{X, V, (E)}$ in V' positive Charakteristik besitzt. Nach Satz (0.1.5) ist dann

$\|\cdot\|_{J_{X, V, (E)}}$ eine äquivalente Norm auf V . Identifizieren wir jetzt gemäß Bemerkung (1.1.3) E mit $J_{X, V, (E)}$ und R mit $J_{V, E}$, so bedeutet dies gerade die Stetigkeit von R^{-1} :

$$\begin{aligned} \bigwedge_{f \in V} \|f\| &\leq \text{char}(J_{X, V, (E)})^{-1} \cdot \|f\|_{J_{X, V, (E)}} = \\ &\text{char}(J_{X, V, (E)})^{-1} \cdot \sup \{ |f(x)| : x \in E, \|J_{X, V, (x)}\| \leq 1 \} \leq \\ &\text{char}(J_{X, V, (E)})^{-1} \cdot \sup \{ |f(x)| : x \in E, \text{char}(V) \|x\| \leq 1 \} = \\ &\text{char}(J_{X, V, (E)})^{-1} \cdot \text{char}(V)^{-1} \cdot \sup \{ |f(x)| : x \in b_1(E) \} = \\ &\text{char}(J_{X, V, (E)})^{-1} \cdot \text{char}(V)^{-1} \cdot \|Rf\|. \end{aligned}$$

Insbesondere ist V unter den gegebenen Bedingungen ein norm-vollständiger Teilraum von X' .

Als Folgerung erhalten wir sofort die isomorphe Charakterisierung bidualer Banachräume von P. Civin - B. Yood [1] :

(1.1.5) Satz (P. Civin - B. Yood [1])

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Bidualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) $b_1(X)$ ist relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
 - ii) V ist komplementiert in X' zu einem $\sigma(X', X)$ -abgeschlossenen Teilraum W .

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma (1.1.2).

2) $\Rightarrow$ 1) Sind V und W abgeschlossene Teilräume von X' , so daß i) und ii) gelten, dann ist nach Satz (0.2.2) X kanonisch isomorph zu V' . Für $E := W_\perp$ sei R wieder die Restriktion der Funktionale aus V auf E . Wie in Lemma (1.1.2) erhält man die Surjektivität von R . Aus ii) folgt unmittelbar die Injektivität von R . Also ist $J_{X, V}^{-1} \circ R^* : E' \rightarrow X$ ein Isomorphismus.

1.2. Eine isometrische Charakterisierung bidualer Banachräume nach Kung Fu Ng

(1.2.1) Lemma

Sind $T : X \rightarrow Y''$ ein Isomorphismus von X auf den Bidualraum Y'' eines Banachraumes Y , $V := T^*(J_{Y', Y''}(Y'))$, $E := T^{-1}(J_{Y, Y''}(Y))$, R die Restriktion der Funktionale aus V auf E , und P die stetige Projektion von X' auf V mit $P^{-1}(0) = E^\perp$, dann gilt: $\|R^{-1}\| \leq \|P\|$.

Beweis:

Zu $f \in E'$ existiert ein $g \in X'$ mit $\|g\| = \|f\|$ und $g|_E = f$.
 Dann existiert nach Voraussetzung ein $v \in V$ mit $v = R^{-1}(f)$
 und $P(g) = v$.

Also gilt:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ f \in b_1(E') \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ g \in b_1(X') \end{array} & P(g) = R^{-1}(f) , \end{array}$$

und daher

$$\|R^{-1}\| = \sup \{ \|R^{-1}f\| : f \in b_1(E') \} \leq \sup \{ \|Pg\| : g \in b_1(X') \} = \|P\|.$$

(1.2.2) Satz

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Bidualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum E von X , so daß die kanonische Injektion $i : E \rightarrow X$ zu einer Isometrie I von E'' auf X fortgesetzt werden kann.
- 3) Es existieren ein abgeschlossener Teilraum E von X und eine hausdorffsche, lokalkonvexe Topologie τ auf X , so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) $b_1(X)$ ist kompakt bzgl. τ .
 - ii) $b_1(E)$ ist dicht bzgl. τ in $b_1(X)$.
 - iii) Kein echter, norm-abgeschlossener Teilraum F von E ist dicht bzgl. τ in X .
- 4) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) $b_1(X)$ ist kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
 - ii) Es gibt eine stetige Projektion P von X' auf V mit $\sigma(X', X)$ -abgeschlossenem Kern und $\|P\| = 1$.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Ist Y ein Banachraum und $T : X \rightarrow Y''$ eine surjektive Isometrie, $V := T^*(J_{Y', Y''}(Y'))$, $E := T^{-1}(J_{Y, Y''}(Y))$ und $R : V \rightarrow E'$ die Restriktionsabbildung der Funktionale aus V auf E , dann ist X nach Lemma (0.2.1) kanonisch isometrisch zu V' .

Da $T(b_1(E)) = J_{Y, Y''}(b_1(Y))$ dicht bzgl. $\sigma(Y'' Y')$ in $b_1(Y'')$ ist, ist $b_1(E)$ dicht bzgl. $\sigma(X, V)$ in $b_1(X)$. Daher ist R eine Isometrie von V auf E' , und somit $J_{X, V}^{-1} \circ R^*$ nach dem Beweis von Lemma (1.1.2) eine isometrische Fortsetzung der kanonischen Injektion $i : E \rightarrow X$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sei $I : E'' \rightarrow X$ eine surjektive Isometrie mit $I|_E = i$, und $V := (I^{-1})^*(J_{E', E''}(E'))$.

Nach Lemma (0.2.1) ist X kanonisch isometrisch zu V' .

V ist kanonisch isometrisch zu $J_{X, V'}(E)'$.

Sei $\tau := \sigma(X, V)$.

Nach Korollar (0.2.3) ist $b_1(X)$ kompakt bzgl. τ , also i).

$J_{E, E''}(b_1(E))$ ist $\sigma(E'', E')$ -dicht in $b_1(E'')$, und für keinen echten, norm-abgeschlossenen Teilraum F von E ist $J_{E, E''}(F)$

$\sigma(E'', E')$ -dicht in E'' nach Lemma (0.1.4) und Korollar (0.2.3).

Hieraus folgen ii) und iii).

3) $\Rightarrow$ 4) Sei wieder $V := (X, \tau)'$. Dann ist $b_1(X)$ $\sigma(X, V)$ -kompakt. Wie die Beweise von Lemma (1.1.2) und Satz (1.1.4) gezeigt haben, ist V ein abgeschlossener Teilraum von X' , der komplementiert zu $E^\perp$ ist. Wegen ii) ist die Restriktionsabbildung $R : V \rightarrow E'$ eine Isometrie, und $I = J_{X, V}^{-1} \circ R^*$ eine Isometrie von E'' auf X .

Nach Korollar (0.2.3) existiert eine Projektion P von E'' auf $J_{E', E''}(E')$ mit $\|P\| = 1$ und $P^{-1}(0) = J_{E, E''}(E)^\perp$.

Dann ist $A := (I^*)^{-1} \circ P \circ I^*$ eine stetige Projektion von X' auf V mit $A^{-1}(0) = E^\perp$ und $\|A\| = \|P\| = 1$.

4) $\Rightarrow$ 1) Sei V ein abgeschlossener Teilraum von X' , so daß $b_1(X) \in \mathcal{G}(X, V)$ -kompakt ist, und eine stetige Projektion P von X' auf V existiert mit $\mathcal{G}(X', X)$ -abgeschlossenem Kern W und $\|P\| = 1$.

Weiter seien $E := W^\perp$ und $R : V \rightarrow E'$ die Restriktion der Funktionale aus V auf E . Nach Korollar (0.2.3) ist X kanonisch isometrisch zu V' . Nach dem Beweis von Satz (1.1.5) genügt es, zu zeigen, daß R eine Isometrie ist.

Wegen $\|R\| \leq 1$ und $1 = \|P\| \leq \|R^{-1}\|$ folgt dies nun sofort aus Lemma (1.2.1).

(1.2.3) Bemerkungen

1) Bedingung 3) in Satz (1.2.2) ist eine abgeschwächte Form einer Bedingung, welche nach G. Crofts [1] impliziert, daß X isometrisch zu einem Bidualraum ist.

Die Äquivalenz von 1) und 4) in Satz (1.2.2) ist die isometrische Version des Satzes (1.1.5) von P. Civin-B. Yood [1].

2) Interessante Beispiele bidualer Banachräume sind die quasi-reflexiven Räume. Wir haben in (0.4) bereits auf das erste Beispiel eines solchen Raumes X von R. C. James [1] hingewiesen, der isometrisch zu seinem Bidual X'' , und nicht-reflexiv ist. Im nächsten Kapitel zeigen wir Charakterisierungen separabler Dualräume, Bidualräume und quasi-reflexiver Banachräume durch Summierbarkeitsbedingungen für beschränkte Folgen.

Kapitel 2

Charakterisierungen dualer Banachräume durch eine verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft

S. Banach - S. Saks [1] zeigten, daß jede beschränkte Folge in $L^p([0,1])$ oder in $l_p(\mathbb{N})$ für $1 < p < +\infty$ eine Teilfolge enthält, deren Césaro-Mittel in der Norm konvergieren.

S. Kakutani [1] zeigte, daß allgemeiner jeder gleichmäßig konvexe Banachraum diese sog. Banach-Saks-Eigenschaft besitzt. Das erste Beispiel eines reflexiven Banachraumes ohne diese Eigenschaft stammt von A. Baernstein II [1].

T. Nishiura - D. Waterman [1] bewiesen ein Reflexivitätskriterium, welches reflexive Räume durch eine verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft charakterisiert. Modifizierte Versionen dieses Satzes wurden mit anderen Methoden von I. Singer [6] und A. Pelczynski [1] bewiesen.

Wir zeigen in diesem Kapitel analoge isomorphe und isometrische Charakterisierungen von reellen, separablen Dualräumen, Bidualräumen und quasi-reflexiven Räumen, die das Ergebnis von T. Nishiura und D. Waterman verallgemeinern.

Das bekannte Resultat von R. C. James [2], welches reflexive Banachräume X dadurch charakterisiert, daß jedes stetige Funktional seine Norm auf der Einheitssphäre von X annimmt, wurde von C. De Vito [1] auf den Fall reeller, separabler Dualräume verallgemeinert. Wir zeigen an einem Beispiel, daß das genannte Ergebnis von De Vito für nicht-separable Banachräume i. a. nicht mehr gilt, zeigen jedoch, daß die Dualräume X'

mit glattem Prädual X wieder dadurch charakterisiert sind, daß alle Funktionale aus diesem Prädual ihre Norm auf der Einheitssphäre von X annehmen.

2.1. Eine isomorphe und eine isometrische Charakterisierung separabler Dualräume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft.

Will man duale oder reflexive Banachräume durch eine Summierbarkeitsbedingung charakterisieren, so zeigt das Beispiel von A. Baernstein II, daß man allgemeinere Summiermethoden als die Césaro-Mittel betrachten muß. Wir wiederholen daher kurz die Definition und Charakterisierung regulärer Summiermethoden, die auf die Arbeiten von O. Toeplitz [1] und J. Schur [1] zurückgeht.

(2.1.1) Definition (O. Toeplitz [1])

Eine unendliche, reelle Matrix $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ heißt reguläre Summierungsmethode, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen die Mittel $t_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ existieren, und wenn $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ist.

(2.1.2) Lemma (O. Toeplitz [1], J. Schur [1])

Eine unendliche, reelle Matrix $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ ist genau dann eine reguläre Summierungsmethode, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \quad \begin{array}{cc} \diagdown & \diagup \\ M \in \mathbb{N} & i \in \mathbb{N} \end{array} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < M$$

$$2) \quad \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = 0$$

$$3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 1$$

(2.1.3) Definition (T. Nishiura - D. Waterman [1])

1) Eine reguläre Summierungsmethode $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ heißt wesentlich positiv, wenn $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = 1$.

2) Eine reguläre Summierungsmethode $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ heißt positiv, wenn gilt:

$$\bigwedge_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} \geq 0.$$

Der Idee von T. Nishiura - D. Watermann [1] folgend, betrachten wir jetzt eine Summierbarkeitsbedingung in hausdorffschen, lokalkonvexen Räumen, welche die klassische Banach-Saks-Eigenschaft in Banachräumen verallgemeinert, und daher hier als verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bezeichnet werden soll.

(2.1.4) Definition

Sei (X, τ) ein reeller, hausdorffscher, lokalkonvexer Raum. X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. der Topologie τ , wenn zu jeder beschränkten Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine reguläre, wesentlich positive Summierungsmethode $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ existieren, so daß die T -Mittel $t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathbb{N}$ existieren, und die Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bzgl. τ konvergent ist.

(2.1.5) Bemerkungen

- 1) Eine mögliche Verallgemeinerung der klassischen Banach-Saks-Eigenschaft wäre auch, die Existenz einer einzigen Summierungsmethode T für alle beschränkten Folgen $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in X mit den obigen Eigenschaften zu fordern. Es zeigt sich jedoch einerseits, daß unsere obige schwächere Bedingung ausreicht, um im folgenden Satz reelle, separable Dualräume zu charakterisieren, andererseits, daß in jedem solchen Banachraum die Césaro-Matrix die in Definition (2.1.4) verlangten Eigenschaften bzgl. der schwach*-Topologie gleichmäßig für alle beschränkten Folgen besitzt.
- 2) Verändert man eine reguläre Summierungsmethode T durch Einfügen von Spalten aus lauter Nullen, so bleibt offensichtlich die Regularität erhalten. Da in Definition (2.1.4) nicht für alle beschränkten Folgen die Existenz einer universellen Summierungsmethode T mit den genannten Eigenschaften gefordert wird, könnte man äquivalent fordern, daß zu jeder beschränkten Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in X eine reguläre, wesentlich positive Summierungsmethode $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ existiert, derart, daß die T -Mittel $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_j = t_i$ konvergieren. Wir ziehen aus technischen Gründen die obige Form vor.

Mit Definition (2.1.4) erhalten wir nun folgende Charakterisierung reeller, separabler Dualräume:

(2.1.6) Satz

Für jeden reellen, separablen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

1) X ist isomorph zu einem Dualraum.

2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X'

mit $\text{char}(V) > 0$, so daß X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$ besitzt.

Zusatz: Bedingung 2) ist äquivalent zu folgender Aussage:

Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) > 0$, so daß X kanonisch isomorph zu V' ist.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Ist X isomorph zu einem Dualraum Y' , so existiert nach Satz (0.2.2) ein Teilraum V von X' , so daß X kanonisch isomorph zu V' ist. V besitzt dann positive Charakteristik:

Für $x \in X$ ist $\|J_{X, V}^{-1} x\|^{-1} \|x\| \leq \|x\|_V \leq \|x\|$.

Nach Satz (0.1.6) ist dann $\text{char}(V) > 0$.

Nach Satz (0.2.2) von I. Singer [2] ist $b_1(X)$ relativ folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$, da X separabel ist.

Die $(C, 1)$ -Summierung $T = (a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } j \leq i \\ 0 & \text{für } j > i \end{cases} \quad \text{ist regulär und positiv.}$$

Zu jeder beschränkten Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Césaro-Mittel bzgl. $\sigma(X, V)$ gegen ein $x \in X$ konvergieren.

Die Césaro-Matrix leistet also gleichmäßig für alle beschränkten Folgen in X das Verlangte.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei nun V ein Teilraum von X' mit positiver Charakteristik.

Für eine Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ in $b_1(X)$ seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge

und $T = (a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ eine reguläre, wesentlich positive

Summierungsmethode, so daß die T -Mittel $t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$

bzgl. $\sigma(X, V)$ gegen $x \in X$ konvergieren.

Da $\|J_{X,V}\| \leq 1$ ist, $J_{X,V}$ $\sigma(X,V)$ - $\sigma(V',V)$ -stetig ist, und die Norm in V' $\sigma(V',V)$ -unterhalbstetig ist, gilt:

$$\|x\|_V = \|J_{X,V}(x)\| \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|J_{X,V}(t_i)\| \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|t_i\|.$$

Da T wesentlich positiv ist, gilt:

$$\|t_i\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \rightarrow 1 \text{ für } i \rightarrow \infty.$$

Also ist $\|x\|_V \leq 1$, d. h. $x \in b_V(X) = \overline{b_1(X)}^{\sigma(X,V)}$.

Sei jetzt $f \in V$ beliebig. Wir zeigen

$$(*) \quad -\infty < \liminf_{m \rightarrow \infty} f(y_m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x):$$

i) Da $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, ist $\{f(y_m) : m \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

ii) Ist $N \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt, so erhält man

aufgrund der Eigenschaften von T :

$$\begin{aligned} \inf_{j > N} f(x_j) &= \inf_{j > N} f(x_j) \left[\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \right] = \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \inf_{j > N} f(x_j) \right] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{k \leq N} a_{ik} \inf_{j > N} f(x_j) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k > N} a_{ik} \inf_{j > N} f(x_j) \right] + \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{l \leq N} a_{il} (f(x_l) - \inf_{j > N} f(x_j)) \right] \end{aligned}$$

Der letzte Term der rechten Seite ist Null, wie sofort aus der Regularitätsbedingung für T nach Lemma (2.1.2)

folgt. Setzt man

$$a_{ik}^+ := \begin{cases} a_{ik} & \text{für } a_{ik} > 0 \\ 0 & \text{für } a_{ik} \leq 0 \end{cases} \text{ und } a_{ik}^- := \begin{cases} a_{ik} & \text{für } a_{ik} < 0 \\ 0 & \text{für } a_{ik} \geq 0 \end{cases},$$

so gilt, da T regulär und wesentlich positiv ist:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| + \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{ik}| + \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{ik} = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{ik}^+. \end{aligned}$$

$$\text{Also } 1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k > N} a_{ik} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{k > N} a_{ik}^+ + \sum_{k > N} a_{ik}^- \right),$$

und somit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k > N} a_{ik}^- = 0.$$

Dann gilt also:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k > N} a_{ik}^- (\sup_{j > N} f(x_j) - \inf_{j > N} f(x_j)) = 0, \text{ und wegen}$$

$$a_{ik}^- < 0 \text{ für alle } i, k \in \mathbb{N}, \sup_{j > N} f(x_j) \sum_{k > N} a_{ik}^- \leq \sum_{k > N} a_{ik}^- f(x_k).$$

Somit ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \inf_{j > N} f(x_j) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{k \leq N} a_{ik} f(x_k) + \inf_{j > N} f(x_j) \sum_{k > N} a_{ik}^+ + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{j > N} f(x_j) \sum_{k > N} a_{ik}^- \right] + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k > N} a_{ik}^- (\sup_{j > N} f(x_j) - \inf_{j > N} f(x_j)) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{k \leq N} a_{ik} f(x_k) + \inf_{j > N} f(x_j) \sum_{k > N} a_{ik}^+ + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{j > N} f(x_j) \sum_{k > N} a_{ik}^- \right] \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{k \leq N} a_{ik} f(x_k) + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{j > N} f(x_j) \sum_{k > N} a_{ik}^+ + \sum_{k > N} a_{ik}^- f(x_k) \right] \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f(x_k) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} f(t_i) = f(x) \end{aligned}$$

Somit gilt also:

$$-\infty < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x)$$

Analog erhält man:

$$(**) \quad f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(y_n) < +\infty.$$

Nach Satz (0.1.9) ist nun X vollständig bzgl. der Mackey-Topologie $\tau(X, V)$. Nach Satz (0.1.6) ist $b_1(X)$ beschränkt bzgl. der Norm $\| \cdot \|_V$, da $\text{char}(V) > 0$.

Dann ist $b_1(X)$ nach Lemma (0.1.4) beschränkt bzgl. $\sigma(X, V)$, also auch beschränkt bzgl. der Mackey-Topologie $\tau(X, V)$.

Nach Satz (0.1.8) von R. C. James [3] folgt dann aus den Ungleichungen (*) und (**), daß $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist. Satz (0.2.2) impliziert schließlich die Behauptung.

(2.1.7) Bemerkung

Wir sind beim Beweis von Satz (2.1.6) der Beweisidee von T. Nishiura - D. Watermann [1] gefolgt. Man kann ebenso zeigen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen jedes Funktional $f \in V$ seine Norm auf dem $\sigma(X, V)$ -Abschluß von $b_1(X)$ annimmt. Dann implizieren wiederum die Sätze von C. De Vito [1] und R. C. James [3], daß X kanonisch isomorph zu V' ist. Wir werden diesem Weg im dritten Abschnitt beim Beweis von Satz (2.3.4) folgen.

Wie der Beweis von $1) \Rightarrow 2)$ von Satz (2.1.6) zeigt, existiert zu jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eines dualen Banachraumes sogar eine positive, reguläre Summierungsmethode $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$, so daß die T -Mittel $t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ bzgl. der schwach*-Topologie konvergieren. Man könnte also alternativ in Definition (2.1.4) der verallgemeinerten Banach-Saks-Eigenschaft auch fordern, daß die Summierungsmethoden T nicht nur wesentlich positiv, sondern positiv sein sollen. Wir benutzen die formal schwächere Definition, um das Ergebnis von T. Nishiura - D. Waterman [1] als Spezialfall mit einzuschließen. Zunächst erhalten wir wieder leicht als Korollar die zu Satz (2.1.6) gehörige isometrische Charakterisierung dualer Banachräume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft:

(2.1.8) Korollar

Für jeden reellen, separablen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) = 1$, so daß X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$ besitzt.

Zusatz: Bedingung 2) ist äquivalent zu folgender Aussage:

Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) = 1$, so daß X kanonisch isometrisch zu V' ist.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Ist $T : X \rightarrow Y'$ eine Isometrie von X auf Y' , so ist X nach Lemma (0.2.1) kanonisch isometrisch zu V' mit $V := T^*(J_{Y, Y''}(Y))$. Also ist $\text{char}(V) = \|J_{X, V}^{-1}\|^{-1} = 1$.

Nach Korollar (0.2.3) ist $b_1(X)$ folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$, und die Behauptung folgt wie im Beweis von Satz (2.1.6).

2) $\Rightarrow$ 1) Ist V ein Teilraum von X' , der Bedingung 2) erfüllt, dann erhält man wie im Beweis von Satz (2.1.6), daß $b_1(X)$ relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist. Also ist $J_{X, V}$ ein Isomorphismus von X auf V' und wegen $\text{char}(V) = \|J_{X, V}^{-1}\|^{-1} = 1$ auch eine Isometrie.

Aus den in Kapitel 1 bewiesenen Charakterisierungen bidualer Banachräume erhalten wir jetzt dem Satz (2.1.6) analoge Charakterisierungen bidualer und quasi-reflexiver Banachräume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft, die auch das bereits zitierte Resultat von T. Nishiura - D. Waterman [1] umfassen.

2.2 Isomorphe und isometrische Charakterisierungen separabler
Bidualräume und quasi-reflexiver Räume durch die verallge-
meinerte Banach-Saks-Eigenschaft

(2.2.1) Satz

Für jeden reellen, separablen Banachraum sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Bidualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) > 0$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$.
 - ii) V ist komplementiert in X' zu einem $\sigma(X', X)$ -abgeschlossenen Teilraum W .
- 3) Es gibt abgeschlossene Teilräume V von X' mit $\text{char}(V) > 0$, und E von X , so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) $b_1(E)$ ist $\sigma(X, V)$ -dicht in einer offenen Kugel von X .
 - ii) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$.
 - iii) V besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(V, E)$.

Beweis:

1) $\Leftrightarrow$ 2) Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz (2.1.6), Satz (1.1.5), und Satz (0.2.2).

3) $\Rightarrow$ 1) Aus ii) folgt nach Satz (2.1.6), daß X kanonisch isomorph zu V' ist. Aus i) folgt wie im Beweis von Satz (1.1.4), daß $J_{X, V'}(E)$ positive Charakteristik in V' besitzt, und hieraus mit iii) und Satz (2.1.6), daß V kanonisch isomorph zu $J_{X, V'}(E)'$ ist.

1) $\Rightarrow$ 3) Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz (1.1.4), Satz (0.2.2) und Satz (2.1.6).

Als Korollar erhält man auch sofort wieder die entsprechende isometrische Charakterisierung, auf deren offenkundigen Beweis wir jetzt verzichten.

(2.2.2) Korollar

Für jeden reellen, separablen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Bidualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) = 1$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$.
 - ii) V ist komplementiert in X' zu einem $\sigma(X', X)$ - abgeschlossenen Teilraum W , und die zugehörige Projektion von X' auf V hat Norm 1.
- 3) Es gibt abgeschlossene Teilräume V von X' mit $\text{char}(V) = 1$, und E von X , so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - i) $b_1(E)$ ist $\sigma(X, V)$ - dicht in $b_1(X)$.
 - ii) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$.
 - iii) V besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(V, E)$.

(2.2.3) Satz

Für jeden reellen, separablen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist quasi-reflexiv von der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) > 0$ und $\text{codim}_{X'}(V) = n$, so daß X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$ besitzt.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus Satz (2.1.6) und Satz (0.3.2).

(2.2.4) Korollar

Für jeden reellen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist quasi-reflexiv.
- 2) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß jeder separable Teilraum Y von X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. einer Topologie $\sigma(Y, V_Y)$ besitzt, wobei V_Y ein abgeschlossener Teilraum von Y' mit $\text{codim}_{Y'} V_Y \leq n$ und $\text{char}(V_Y) > 0$ ist.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz (2.2.3) und Satz (0.3.2) von I. Singer, der besagt, daß Quasi-Reflexivität separabel bestimmt ist.

Im nächsten Lemma zeigen wir eine Permanenz-Eigenschaft für die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft, aus der zusammen mit Satz (2.1.6) oder Korollar (2.2.4) sofort das Ergebnis von T. Nishiura - D. Waterman [1] als Spezialfall dieser Sätze folgt.

(2.2.5) Lemma

Seien X ein Banachraum, V ein Teilraum von X' mit $\text{char}(V) > 0$,

und Y ein $\sigma(X,V)$ -abgeschlossener Teilraum von X .

Besitzt X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X,V)$, dann besitzt Y die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(Y,W)$ mit $W := \{ f|_Y : f \in V \} \subseteq Y'$.

Beweis:

Seien $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $b_1(Y)$ und $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine reguläre, wesentlich positive Summierungsmethode, so daß oBdA. $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_j = z \in X$ bzgl. $\sigma(X,V)$.

Sei dann $w = f|_Y$ mit $f \in V$. Dann gilt:

$$w(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_j) = f(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_j) \longrightarrow f(z) \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Da Y $\sigma(X,V)$ -abgeschlossen ist, gilt $z \in Y$.

(2.2.6) Korollar (T. Nishiura - D. Waterman [1])

Für jeden reellen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist reflexiv.
- 2) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. der Norm-Topologie.
- 3) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X,X')$.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Wie bei T. Nishiura - D. Waterman [1].

2) $\Rightarrow$ 3) Da die schwache Topologie größer als die Norm ist, folgt sofort die Behauptung.

3) $\Rightarrow$ 1) Nach Lemma (2.2.5) und dem Satz von Hahn-Banach besitzt jeder abgeschlossene, separable Teilraum Y von X die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(Y,Y')$, ist also nach Satz (2.1.6) reflexiv. Da Reflexivität wie Quasi-Reflexivität separabel bestimmt ist, ist X reflexiv.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen unmittelbaren Folgerungen aus den bewiesenen Ergebnissen:

(2.2.7) Korollar

1) (J. Schreier [1]): $C([0,1], \mathbb{R})$ hat nicht die klassische Banach-Saks-Eigenschaft.

Es gibt keinen Teilraum V von $C([0,1], \mathbb{R})'$ positiver Charakteristik, so daß $C([0,1], \mathbb{R})$ die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. der V -Topologie besitzt.

2) Für $L^1([0,1], \mathbb{R})$ und $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ gelten die entsprechenden Aussagen wie in 1).

3) (D. P. Milman [1], S. Kakutani [1]): Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.

2.3 Äquivalenz von w^* -Kompaktheit, w^* -Folgenkompaktheit, w^* -abzählbar-Kompaktheit und verallgemeinerter Banach-Saks-Eigenschaft in Dualräumen mit glattem Prädual

Der bekannte Satz von R. C. James [2], daß ein Banachraum X reflexiv ist, wenn jedes Funktional aus X' seine Norm auf der Einheitssphäre von X annimmt, wurde von C. De Vito [1] zu folgender Charakterisierung reeller, separabler Dualräume verallgemeinert:

(2.3.1) Satz (C. De Vito [1])

Für jeden reellen, separablen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph (bzw. isometrisch) zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) > 0$ (bzw. $\text{char}(V) = 1$), so daß jedes Funktional $f \in V$ seine Norm auf dem $\sigma(X, V)$ -Abschluß von $b_1(X)$ (bzw. auf $b_1(X)$) annimmt.

Zusatz: Bedingung 2) ist äquivalent zu folgender Aussage:

Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' mit $\text{char}(V) > 0$ (bzw. $\text{char}(V) = 1$), so daß X kanonisch isomorph (bzw. kanonisch isometrisch) zu V' ist.

Das folgende Beispiel zeigt sofort, daß diese Charakterisierung für den Fall nicht-separabler Banachräume X i. a. nicht mehr gilt:

(2.3.2) Beispiel

Seien $X := l_1([0, 1], \mathbb{R})$

$V := C([0, 1], \mathbb{R}) \quad X'$

Offensichtlich nimmt jedes $f \in V$ seine Norm auf $b_1(X)$ an.

Wir haben bereits in (0.1.10) bemerkt, daß $\text{char}(V) = 1$ in $l_\infty([0,1], \mathbb{R})$, und in (0.2.5) festgestellt, daß X nicht isomorph zu V' ist, was wir im letzten Kapitel noch beweisen werden. Insbesondere zeigt dieses Beispiel auch, daß Satz (0.1.9) für nicht-separable Banachräume X i. a. nicht mehr gilt.

Bekanntlich sind für nicht-separable Banachräume X auch $\sigma(X', X)$ -kompakte Teilmengen von X' nicht notwendig $\sigma(X', X)$ -folgenkompakt. Für glatt normierte Banachräume X zeigten jedoch J. Hagler- F. Sullivan [1], daß $\sigma(X', X)$ -kompakte Teilmengen von X' auch $\sigma(X', X)$ -folgenkompakt sind. Wir zeigen hier das erweiterte Resultat, daß für abgeschlossene, glatt normierte Teilräume V von X' mit positiver Charakteristik die Eigenschaften einer beschränkten Teilmenge von X , relativ $\sigma(X, V)$ -kompakt, relativ $\sigma(X, V)$ -folgenkompakt oder relativ $\sigma(X, V)$ -abzählbar-kompakt zu sein, oder die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$ zu besitzen, wie im Fall separabler Räume X wieder alle äquivalent sind. Dies folgt sofort aus der Äquivalenz dieser Eigenschaften für die Einheitskugel von X . Ebenso ist für solche Teilräume V von X' die Bedingung, daß alle Funktionale $f \in V$ ihre Norm auf dem $\sigma(X, V)$ -Abschluß von $b_1(X)$ annehmen, wieder äquivalent dazu, daß X kanonisch isomorph zu V' ist.

(2.3.3) Definition

Ein reeller Banachraum X heißt glatt normiert, wenn gilt:

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ x \in S_1(X) & & f_x \in X' \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad f_x(x) = 1 = \|x\|$$

(2.3.4) Satz

Seien X ein reeller Banachraum und V ein abgeschlossener, glatt normierter Teilraum von X' mit $\text{char}(V) > 0$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist kanonisch isomorph zu V' .
- 2) $b_1(X)$ ist relativ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 3) $b_1(X)$ ist relativ folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 4) $b_1(X)$ ist relativ abzählbar kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 5) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 6) Jedes Funktional $f \in V$ nimmt seine Norm auf der Sphäre $S_V(X) = \{ x \in X : \|x\|_V = 1 \}$ an.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Dies folgt aus Satz (0.2.2) von J. Dixmier [1] und I. Singer [1] - [3] .

2) $\Rightarrow$ 3) Diese Implikation folgt aus dem Ergebnis von J. Hagler - F. Sullivan [1] :

Nach 2) ist $b_V(X) = \overline{b_1(X)}^{\sigma(X, V)}$ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.

Da $J_{X, V'}$ von X , versehen mit der Norm $\| \cdot \|_V$, auf V' isometrisch ist, ist $b_V(X)$ folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$, also $b_1(X)$ relativ folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.

3) $\Rightarrow$ 4) Jede bzgl. $\sigma(X, V)$ relativ folgenkompakte Menge in X ist auch relativ abzählbar kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.

4) $\Rightarrow$ 6) Sei $f \in V$ und $s = \sup \{ f(x) : x \in b_V(X) \}$. Da nach Lemma (0.1.4) $b_1(X)$ $\sigma(X, V)$ - dicht in $b_V(X)$ ist, ist $s = \|f\|$ und es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$.

Sei x_0 ein Häufungspunkt bzgl. $\sigma(X, V)$ der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann ist $x_0 \in b_V(X)$ und $f(x_0) = s = \|f\|$. Dann ist aber

$\|x_0\|_V = 1$, und die Behauptung ist gezeigt.

3)⇒5) Diese Behauptung haben wir bereits im ersten Teil des Beweises von Satz (2.1.6) gezeigt.

5)⇒6) Sei wieder $f \in V$ und $s = \sup \{ f(x) : x \in b_V(X) \}$. Wegen Lemma (0.1.4) ist, wie oben bemerkt, $s = \|f\|$, und es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $b_1(X)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$.

Sei dann $T = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine reguläre, wesentlich positive Summierungsmethode, so daß o.B.d.A. $t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ für $i \rightarrow \infty$ bzgl. $\sigma(X, V)$ gegen $x_0 \in X$ konvergiert.

Wie im Beweis von Satz (2.1.6) erhält man, daß $\|x_0\|_V \leq 1$ ist, d. h. $x_0 \in b_V(X)$.

Wegen der Regularität von T und wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$ gilt dann:

$$f(x_0) = f(\sigma(X, V) - \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} f(x_j) = s.$$
 Dann gilt auch $\|x_0\|_V = 1$, und die Behauptung ist gezeigt.

6)⇒1) Da $\text{char}(V) > 0$, ist V total in X' , und daher

$J_{X, V'} : X \rightarrow V'$ injektiv. Wegen $\|J_{X, V'}\| \leq 1$ bleibt die Surjektivität von $J_{X, V'}$ zu zeigen.

Sei $N(V') := \{ F \in V' : \bigvee_{f \in S_1(V)} F(f) = \|F\| \}$.

Nach einem Satz von E. Bishop - R. Phelps [1] ist $N(V')$ norm-dicht in V' .

Sei dann $F \in S_1(V') \cap N(V')$.

Also existiert ein $f_0 \in S_1(V)$ mit $F(f_0) = \|F\| = 1$.

Nach Voraussetzung 6) existiert ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\|_V = 1$,

so daß $f_0(x_0) = \|f_0\| = 1 = \|x_0\|_V = \|J_{X,V}(x_0)\|$.

Da V glatt normiert ist, gilt $F = J_{X,V}(x_0)$.

Also gilt: $S_1(V') \cap N(V') \subset J_{X,V}(S_V(X))$.

Da $\text{char}(V) > 0$, ist nach Satz (0.1.6) $J_{X,V}(S_V(X))$ norm-

abgeschlossen in V' , und mit dem Satz von E.Bishop-R.Phelps [1]:

$S_1(V') \subset \overline{S_1(V') \cap N(V')} \subset J_{X,V}(S_V(X))$.

Also ist $J_{X,V}$ surjektiv, und somit X kanonisch isomorph zu V' .

Das entsprechende isometrische Ergebnis lautet:

(2.3.5) Korollar

Seien X ein reeller Banachraum und V ein abgeschlossener, glatt normierter Teilraum von X' mit $\text{char}(V) = 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist kanonisch isometrisch zu V' .
- 2) $b_1(X)$ ist kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 3) $b_1(X)$ ist folgenkompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 4) $b_1(X)$ ist abzählbar kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 5) X besitzt die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft bzgl. $\sigma(X, V)$.
- 6) Jedes Funktional $f \in V$ nimmt seine Norm auf der Sphäre $S_1(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ an.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz (2.3.4), wenn man beachtet, daß wegen der Voraussetzung $\text{char}(V) = 1$ die Abbildung $J_{X,V}$ bereits eine Isometrie ist.

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen Folgerungen aus Satz (2.3.4):

(2.3.6) Korollar

Sei X ein reeller Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1) Ist X' glatt normiert, und nimmt jedes $f \in X'$ seine Norm auf $S_1(X)$ an, dann ist X reflexiv.
- 2) Ist X' sehr glatt⁵⁾ normiert, dann ist X reflexiv.
- 3) Ist die Norm von X' Frechet-differenzierbar, dann ist X reflexiv.
- 4) Ist die Norm von X'' lokal gleichmäßig konvex oder schwach lokal gleichmäßig konvex, dann ist X reflexiv.
- 5) Ist X''' glatt normiert, dann ist X reflexiv.
- 6) Ist X''' strikt konvex normiert, dann ist X reflexiv.

Bezüglich der Definition der in Korollar (2.3.6) vorkommenden Begriffe sei auf J. Diestel [1] verwiesen. Behauptung 1) folgt unmittelbar aus Satz (2.3.4). Für die Behauptungen 2) - 6) zeigt J. Diestel [1], daß jedes Funktional $f \in X'$ seine Norm auf der Sphäre $S_1(X)$ annimmt. In allen Fällen ist X' glatt normiert. Dann folgen die Behauptungen sofort aus Satz (2.3.5).

J. Diestel [1] erhält die Implikationen von Korollar (2.3.6) durch Anwendung des tiefen, bereits mehrmals zitierten Reflexivitätskriteriums (0.1.8) von R.C. James [2]. Wir sehen am Beweis von Satz (2.3.4), 6) = 1), daß sich die obigen Ergebnisse bereits leicht aus der von E. Bishop und R. Phelps [1] bewiesenen Tatsache ergeben, daß alle Banachräume subreflexiv sind.

⁵⁾engl.: 'very smooth'

Kapitel 3

Charakterisierungen dualer Banachräume durch stetige Operatoren:

(Umkehrung eines Satzes von R. Schatten)

R. Schatten [1] zeigte, daß für einen Dualraum X' und einen beliebigen Banachraum Y der Raum $L(Y, X')$ kanonisch isometrisch zum Dualraum des projektiven Tensorproduktes $Y \otimes X$ ist.

Nach Kapitel 1 ist ein Banachraum X genau dann isomorph zu einem Dualraum, wenn ein Teilraum V von X' existiert, so daß X kanonisch isomorph zu V' ist. Wir zeigen durch Anwendung des Dualraum-Kriteriums (0.2.2) von J. Dixmier und I. Singer, daß ein Banachraum X genau dann kanonisch isomorph zu V' ist, wenn der Raum $L(Y, X)$ kanonisch isomorph zum Dualraum des Tensorproduktes $Y \otimes V$ ist für alle Banachräume Y . Aus dieser isomorphen Charakterisierung dualer Banachräume ergibt sich im isometrischen Fall der erwähnte Satz von R. Schatten und eine Umkehrung hierzu.

(3.1) Definition (R. Schatten [1])

Seien X und Y Banachräume und V ein Teilraum von X' .

Für $y \in Y$ und $f \in V$ sei $y \otimes f \in L(Y, X)'$ definiert durch:

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ T \in L(Y, X) \end{array} \quad y \otimes f(T) := f(T(y))$$

$$Y \otimes V := \text{Lin} \{ y \otimes f : y \in Y, f \in V \}.$$

Das Tensorprodukt $Y \otimes V$ sei mit der von $L(Y, X)'$ induzierten Norm versehen. Wir beginnen mit einem Lemma über die Charakteristik von $Y \otimes V$ in $L(Y, X)'$:

(3.2) Lemma

Seien X und Y Banachräume und V ein Teilraum von X' .

Dann gilt $\text{char } (V) = \text{char } (Y \otimes V)$.

Beweis:

i) Sei $A \in L(Y, X)$. Nach Satz (0.1.6) gilt:

$$\text{char } (Y \otimes V) = \inf \{ \|A\|_{Y \otimes V} : A \in L(Y, X), \|A\| = 1 \}.$$

Ist $A \in L(Y, X)$, $\|A\| = 1$, dann gilt:

$$\|A\|_{Y \otimes V} \geq \sup \{ |f(Ay)| : f \in b_1(V), y \in b_1(Y) \} \geq$$

$$\sup \{ \|Ay\|_V : y \in b_1(Y) \} \geq \text{char } (V)$$

ii) Sind $f \in b_1(Y')$ und $u = \sum_{i=1}^n y_i \otimes f_i \in b_1(Y \otimes V)$, so ist

$$\sum_{i=1}^n f(y_i) f_i \in b_1(V). \text{ Folglich gilt nach Satz (0.1.5):}$$

$$\begin{aligned} \text{char } (Y \otimes V) &= \inf_{A \in S_1(L(Y, X))} \sup_{u \in b_1(Y \otimes V)} |u(A)| \leq \\ &\leq \inf_{\substack{f \in S_1(Y') \\ x \in S_1(X)}} \sup_n \left| \sum_{i=1}^n f(y_i) f_i(x) \right| \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^n y_i \otimes f_i \in b_1(Y \otimes V) \right) \end{aligned}$$

$$\leq \inf_{x \in S_1(X)} \sup_{f \in b_1(V)} |f(x)| = \text{char } (V)$$

(3.3) Satz

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isomorph zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß $L(Z, X)$ kanonisch isomorph zum Dualraum des Tensorproduktes $Z \otimes V$ ist für alle Banachräume Z .
- 3) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß $L(X)$ kanonisch isomorph zum Dualraum des Tensorproduktes $X \otimes V$ ist.

Zusatz: Die äquivalenten Bedingungen 2) und 3) sind genau dann erfüllt, wenn X kanonisch isomorph zu V' ist.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Nach Lemma (0.2.1) impliziert 1), daß ein abgeschlossener Teilraum V von X' existiert, so daß X kanonisch isomorph zu V' ist. Ist Z ein beliebiger Banachraum, so zeigen wir, daß $b_1(L(Z, X))$ relativ kompakt bzgl. der $Z \otimes V$ -Topologie ist. Aus Satz (0.2.2) von J. Dixmier und I. Singer folgt dann die Behauptung.

i) Nach Satz (0.2.2) und Lemma (0.1.4) ist $b_V(X)$ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$.

Also ist $K := \prod_{z \in Z} \|z\| b_V(X)$ kompakt in der zugehörigen Produkt-Topologie.

Die Abbildung $R : b_Z \otimes_V (L(Z, X)) \rightarrow K$ sei definiert durch:

$$R(T) := (Tz)_{z \in Z}.$$

Seien

$$M := \left\{ (x_z)_{z \in Z} \in K : \bigwedge_{u, v \in Z} x_u + x_v = x_{u+v} \right\}$$

$$N := \left\{ (x_z)_{z \in Z} \in K : \bigwedge_{u \in Z} \bigwedge_{t \in \mathbb{K}} tx_u = x_{tu} \right\}$$

$$C := M \cap N$$

Dann ist offensichtlich R injektiv und $R(b_Z \otimes_V (L(Z, X))) \subset C$ nach Lemma (3.2). Denn aus

$$\|T\| \leq \text{char}(Z \otimes V)^{-1} = \text{char}(V)^{-1} \text{ folgt:}$$

$$Tz \in \|z\| b_V(X) \text{ für alle } z \in Z.$$

Es gilt auch $R(b_Z \otimes_V (L(Z, X))) = C$. Denn für $(x_z)_{z \in Z} \in C$ ist die Funktion $T : Z \rightarrow X$, welche z auf x_z abbildet, linearer Operator und es gilt:

$$\bigwedge_{z \in Z} \|x_z\| \leq \text{char}(V)^{-1} \|z\|.$$

Daraus folgt wieder mit Lemma (3.2.):

$$\bigwedge_{z \in Z} \|Tz\| = \|x_z\| \leq \text{char}(Z \otimes V)^{-1} \|z\|,$$

d. h. $T \in b_Z \otimes_V (L(Z, X))$.

ii) C ist abgeschlossen in K:

Für $u, v \in Z$ sei $g_{u,v} : K \rightarrow X$ definiert durch:

$$(x_z)_{z \in Z} \bigwedge_{z \in Z} g_{u,v}((x_z)_{z \in Z}) := x_{u+v} - x_u - x_v$$

Bezeichnet $p_z : K \rightarrow b_V(X)$ die z -te Projektionsabbildung, dann gilt:

$$(x_z)_{z \in Z} \bigwedge_{z \in Z} g_{u,v}((x_z)_{z \in Z}) = p_{u+v}((x_z)_{z \in Z}) - p_u((x_z)_{z \in Z}) - p_v((x_z)_{z \in Z}).$$

Also ist $g_{u,v}$ stetig für alle $u, v \in Z$ nach Def. der Produkt-Topologie. Setzt man $C_{u,v} := g_{u,v}^{-1}(0)$, und definiert analog $C_{t,u}$ für $u, v \in Z, t \in K$, so erhält man also, daß

$$C = \left(\bigcap_{u,v \in Z} C_{u,v} \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{t \in K \\ u \in Z}} C_{t,u} \right) \text{ abgeschlossen in } K \text{ ist.}$$

iii) R ist ein Homöomorphismus von $b_Z \otimes_V (L(Z, X))$, versehen mit der $Z \otimes V$ -Topologie, auf C:

Sei etwa $U := \{ T \in b_Z \otimes_V (L(Z, X)) : |z \otimes v(T) - z \otimes v(T_0)| < \varepsilon \}$ eine $Z \otimes V$ -Umgebung von T_0 in $b_Z \otimes_V (L(Z, X))$.

Dann ist

$$R(U) = \{ (Tu)_{u \in Z} : T \in U \} =$$

$$\{ (Tu)_{u \in Z} : T \in b_Z \otimes_V (L(Z, X)), |v(p_Z(R(T))) - v(p_Z(R(T_0)))| < \varepsilon \}.$$

Also ist $R(U)$ eine Umgebung von $R(T_0)$ in C aus einer Subbasis der Topologie in C. Damit ist R ein Homöomorphismus.

Also ist $b_Z \otimes_V (L(Z, X))$ kompakt, und somit $b_1(L(Z, X))$ relativ kompakt bzgl. der $Z \otimes V$ -Topologie. Nach Satz (0.2.2) ist daher $L(Z, X)$ kanonisch isomorph zu $(Z \otimes V)'$.

2) $\Rightarrow$ 3) trivalerweise.

3) $\Rightarrow$ 1) Sei V ein Teilraum von X' , so daß $L(X)$ kanonisch isomorph zu $(X \otimes V)'$ ist. Aus Lemma (3.2) folgt sofort, daß V positive Charakteristik hat. Wir zeigen, daß $b_V(X)$ kompakt bzgl. $\sigma(X, V)$ ist:

Seien $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in

$b_V(X)$, $x_0 \in S_1(X)$, $f \in S_1(X')$ mit $f(x_0) = 1$. Es gilt:

$$\bigwedge_{i \in I} \sup \{ \| (f \otimes x_i)(x) \| : x \in b_1(X) \} =$$

$$= \sup \{ \| f(x) \| \| x_i \| : x \in b_1(X) \} =$$

$$= \| f \| \| x_i \| \leq \text{char}(V)^{-1} = \text{char}(X \otimes V)^{-1}$$

Also ist $(f \otimes x_i)_{i \in I}$ ein Netz in $b_{X \otimes V}(L(X))$.

Nach Satz (0.2.2) ist $b_{X \otimes V}(L(X))$ kompakt bzgl. der $X \otimes V$ -Topologie. Daher existiert ein bzgl. $\sigma(L(X), X \otimes V)$ konvergentes Teilnetz von $(f \otimes x_i)_{i \in I}$ mit Limes

$T_0 \in b_{X \otimes V}(L(X))$.

Sei o.B.d.A. $(f \otimes x_i)_{i \in I}$ konvergent bzgl. $\sigma(L(X), X \otimes V)$ gegen T_0 . Sind dann $g \in V$, $\varepsilon > 0$, und $U_{g, \varepsilon} :=$

$\{ x \in X : |g(x) - g(T_0 x_0)| < \varepsilon \}$ eine

$\sigma(X, V)$ -Umgebung von $T_0 x_0$, dann ist

$W_{x_0, g, \varepsilon} := \{ S \in L(X) : |g(Sx_0) - g(T_0 x_0)| < \varepsilon \}$ eine

$\sigma(L(X), X \otimes V)$ -Umgebung von T_0 und $(f \otimes x_i) \in W_{x_0, g, \varepsilon}$

für alle $i \in I$ größer als ein geeignetes $i_0 \in I$.

Also

$$\bigwedge_{i > i_0} |g(x_i) - g(T_0 x_0)| = |(x_0 \otimes g)(f \otimes x_i) - (x_0 \otimes g)(T_0)| < \varepsilon.$$

Also konvergiert (x_i) bzgl. $\sigma(X, V)$ gegen $T_0 x_0$. Wegen

Lemma (3.2) gilt:

$$\|T_0 x_0\| \leq \|T_0\| \leq \text{char}(X \otimes V)^{-1} = \text{char}(V)^{-1},$$

also $T_0 x_0 \in b_V(X)$.

Somit ist $b_V(X)$ kompakt, also $b_1(X)$ relativ kompakt

bzgl. $\sigma(X, V)$, und aus Satz (0.2.2) folgt die Behauptung.

Hieraus erhält man mit Lemma (3.2.), Lemma (0.1.4) und Korollar (0.2.3) sofort folgende analoge isometrische Charakterisierung dualer Banachräume:

(3.4) Korollar

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist isometrisch zu einem Dualraum.
- 2) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß $L(Z, X)$ kanonisch isometrisch zum Dualraum des Tensorproduktes $Z \otimes V$ ist für alle Banachräume Z .
- 3) Es existiert ein abgeschlossener Teilraum V von X' , so daß $L(X)$ kanonisch isometrisch zum Dualraum des Tensorproduktes $X \otimes V$ ist.

Zusatz: Die äquivalenten Bedingungen 2) und 3) sind genau dann erfüllt, wenn X kanonisch isometrisch zu V' ist.

(3.5) Bemerkungen

- 1) Im ersten Teil des Beweises von Satz (3.3) sind wir einem üblichen Beweis des bekannten Satzes von L. Alaoglu [1]

gefolgt. Setzt man im Beweis von Satz (3.3) $X := \mathbb{K}$, so ergibt sich der Satz von Alaoglu als Spezialfall von Satz (3.3), denn wir haben dann gerade gezeigt, daß $b_1(L(Z, \mathbb{K})) = b_1(Z')$ kompakt bzgl. $\sigma(Z', Z)$ ist.

- 2) Der erwähnte Satz von R. Schatten [1] besagt, daß in Korollar (3.4) Behauptung 2) aus 1) folgt. Denn die von $L(Z, X)'$ auf $Z \otimes V$ induzierte Norm ist nach R. Schatten [1] gerade die größte Cross-Norm, wenn X kanonisch isometrisch zu V' ist. Folglich ist dann $L(Z, X)$ kanonisch isometrisch zum Dualraum des projektiven Tensorproduktes $Z \otimes V$. Ist umgekehrt $L(Z, X)$ kanonisch isometrisch zu $(Z \otimes V)'$ für einen Teilraum V von X' , so bedeutet die Implikation $2) \Rightarrow 1)$ die Umkehrung des obigen Ergebnisses von R. Schatten.

Aus Korollar (3.4) ergibt sich unmittelbar folgende bekannte Charakterisierung reflexiver Banachräume:

(3.6) Korollar

Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn die Einheitskugel von $L(X)$ kompakt in der schwachen Operatortopologie ist.

Das Problem der Reflexivität der Operatorenräume $L(Z, X)$ für Banachräume Z und X wurde gelöst in den Arbeiten von W.H. Ruckle [1] und J.R. Holub [1]. Das Problem, wann $L(X)$ isometrisch zum Bidualraum des Raumes der kompakten Operatoren auf einem Banachraum X ist, wurde untersucht in den Arbeiten von J. Hennefeld [1], N.P. Cac [1] u.a.. Wir gehen hierauf nicht weiter ein.

Kapitel 4

Charakterisierungen der Schur-Eigenschaft durch Operatorenideale

In Kapitel 2 hatten wir reguläre Summierungsmethoden benutzt, um eine verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft zu definieren. Diese stellen einen Spezialfall allgemeinerer konvergenz-erhaltender Summierungsmethoden dar. Wir haben gesehen, daß zu jeder beschränkten Folge in einem separablen Dualraum eine reguläre Summierungsmethode existiert, welche bzgl. der schwach*-Topologie auf X bereits konvergenz-erzeugend für diese Folge ist.

Aus einer von J. Schur [1] gegebenen Charakterisierung konvergenz-erhaltender und konvergenz-erzeugender Summierungsmethoden folgt unmittelbar, daß für jede nichtleere Menge A schwach-konvergente Folge in $l_1(A)$ bereits norm-konvergent ist. Diese Eigenschaft von $l_1(A)$ nennt Z. Semadeni [1] die Schur-Eigenschaft.

Wir zeigen mit Hilfe des Faktorisierungslemmas von W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson und A. Pelczynski [1] eine Charakterisierung der Banachräume X mit Schur-Eigenschaft durch die Gleichheit der Operatorenideale $W(Y, X)$ aller schwach-kompakten und $K(Y, X)$ aller kompakten Operatoren von einem beliebigen Banachraum Y nach X . Hieraus folgern wir Charakterisierungen der Dualräume und Bidualräume mit Schur-Eigenschaft. Als Folgerungen dieser Charakterisierungen ergeben sich unmittelbar

1. das von T. E. Armstrong [1] mit maßtheoretischen Mitteln bewiesene Resultat, daß kein Raum $l_1(A)$ für eine unendliche

Menge A isomorph zu einem Bidualraum ist,

2. die zuerst von R. S. Phillips [1], J. Dieudonné [1], I. M. Gelfand [1] und J. Dixmier [2] mit anderen Methoden bewiesenen Resultate, daß $c_0(\mathbb{N})$, $C([0,1])$ und $L^1([0,1])$ nicht isomorph zu Dualräumen sind, und
3. das in Kapitel 2 benutzte Beispiel, daß $l_1([0,1])$ nicht isomorph zum Dualraum von $C([0,1])$ ist. Als weiteres Korollar ergibt sich schließlich sofort eine Klassifikation der M -Räume und L -Räume mit Schur-Eigenschaft.

4.1. Charakterisierungen der Banachräume mit Schur-Eigenschaft

(4.1.1) Definition (Z. Semadeni [1], A. Grothendieck [2])

- 1) Ein Banachraum X besitzt die Schur-Eigenschaft, wenn jede schwach-konvergente Folge in X auch norm-konvergent ist.
- 2) Ein Banachraum X besitzt die Dunford-Pettis-Eigenschaft, wenn für jede schwache Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X und jede schwache Nullfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X' die Skalare $f_n(x_n)$ gegen Null konvergieren.

(4.1.2) Beispiele

- 1) Jeder abgeschlossene Teilraum eines Banachraumes mit Schur-Eigenschaft besitzt diese.
- 2) Jeder Banachraum mit Schur-Eigenschaft besitzt auch die Dunford-Pettis-Eigenschaft.
- 3) $c_0(\mathbb{N})$, $C([0,1])$, $\mathbb{R}$ und $L^1([0,1])$, $\mathbb{R}$ besitzen nach A. Grothendieck [2] die Dunford-Pettis-Eigenschaft, aber keiner dieser Räume hat die Schur-Eigenschaft. Z.B. ist die kanonische Basis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $c_0(\mathbb{N})$ eine

schwache, aber keine Norm-Nullfolge. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ist eine schwache Nullfolge in $C([0,1], \mathbb{R})$, aber nicht norm-konvergent. Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n(x) := \sin(n\pi x)$ ist bekanntlich schwache Nullfolge in $L^1([0,1], \mathbb{R})$, aber wegen $\|g_n\| = \frac{2}{\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ keine Norm-Nullfolge.

- 4) Aus der Arbeit von I. Leonard [1] folgt sofort, daß $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus X_n)_{l_1}$ die Schur-Eigenschaft genau dann besitzt, wenn alle Banachräume $X_n (n \in \mathbb{N})$ sie besitzen. Für $X_n := l_2(n)$ ergibt sich ein Beispiel von C. Stegall [1]: $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \oplus l_2(n))_{l_1}$ besitzt die Schur-Eigenschaft und daher auch die Dunford-Pettis-Eigenschaft, während der Dualraum dieses Banachraumes keine dieser Eigenschaften besitzt.

Wir beginnen mit einem einfachen Lemma:

(4.1.3) Lemma

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) Jede schwach-kompakte Teilmenge von X ist norm-kompakt.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Da nach dem Satz von W. F. Eberlein [1] jede schwach-kompakte Teilmenge M von X auch schwach-folgenkompakt ist, ist sie nach Voraussetzung auch norm-folgenkompakt und damit norm-kompakt.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwache Nullfolge in X . Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht in der Norm gegen Null, so existiert eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, die Null nicht als Berührungspunkt bzgl. der Norm hat. Aber $\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist nach Voraussetzung norm-kompakt. Dann existiert aber eine Teilfolge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ der Folge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ die schwach und auch in der Norm gegen Null konvergiert. Das ist ein Widerspruch.

Hieraus erhält man sofort folgendes Korollar:

(4.1.4) Korollar

Sind X ein Banachraum mit Schur-Eigenschaft, Y ein beliebiger Banachraum und $T : Y \rightarrow X$ ein schwach-kompakter, linearer Operator, dann ist T kompakter Operator.

A. Grothendieck [2] erhält folgendes Ergebnis:

(4.1.5) Satz (A. Grothendieck [2])

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Dunford-Pettis-Eigenschaft.
- 2) Jeder schwach-kompakte, lineare Operator von X in einen beliebigen Banachraum Y ist vollstetig⁶⁾.

Im folgenden geben wir eine analoge Charakterisierung der Banachräume mit Schur-Eigenschaft dadurch, daß wir die Umkehrung von Korollar (4.1.4) zeigen.

⁶⁾ $T : X \rightarrow Y$ heißt vollstetig, wenn T schwach-konvergente Folgen in norm-konvergente Folgen transformiert.

(4.1.6) Definition

Für Banachräume X und Y bezeichne

- 1) $W(Y, X)$ den Teilraum der schwach-kompakten Operatoren in $L(Y, X)$.
- 2) $K(Y, X)$ den Teilraum der kompakten Operatoren in $L(Y, X)$.
- 3) $C(Y, X)$ den Teilraum der vollstetigen Operatoren in $L(Y, X)$.

(4.1.7) Bemerkungen

Sind X und Y Banachräume, so gelten folgende bekannte Relationen:

- 1) $K(Y, X) \subset W(Y, X)$.
- 2) $K(Y, X) \subset C(Y, X)$.
- 3) $C(Y, X)$ ist nicht in $W(Y, X)$ enthalten. Z. B. ist die Identität auf $l_1(\mathbb{N})$ vollstetig, da $l_1(\mathbb{N})$ die Schur-Eigenschaft besitzt, aber nicht schwach-kompakt.

Als Charakterisierung der Banachräume X mit Schur-Eigenschaft erhalten wir jetzt:

(4.1.8) Satz

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) $L(Z, X) = C(Z, X)$ für jeden reflexiven Banachraum Z .
- 3) $W(Y, X) \subset C(Y, X)$ für jeden Banachraum Y .
- 4) $W(Y, X) = K(Y, X)$ für jeden Banachraum Y .

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 4) Dies haben wir mit Korollar (4.1.4) gezeigt.

4) $\Rightarrow$ 3) Dies folgt sofort aus Bemerkung (4.1.7).

3) $\Rightarrow$ 2) Da jeder stetige, lineare Operator zwischen Banachräumen schwach-stetig ist, ist jeder solche Operator von einem reflexiven Raum Z nach X auch schwach-kompakt. Aus der Voraussetzung folgt dann die Behauptung.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei jetzt K eine schwach-kompakte Teilmenge von X . Nach dem Faktorisierungslemma von W. J. Davis - T. Figiel - W. B. Johnson - A. Pelczynski [1] existiert dann ein reflexiver Banachraum Z und ein stetiger, linearer Operator S von Z nach X , so daß $K \subset S(b_1(Z))$.

Ist jetzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $b_1(Z)$ mit $Sy_n = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann existiert eine Teilfolge $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die in Z schwach-konvergent ist. Da nach Voraussetzung S vollstetig ist, ist $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ norm-konvergent. Daher ist K norm-kompakt, und X besitzt nach Lemma (4.1.3) die Schur-Eigenschaft.

(4.1.9) Bemerkung

- 1) Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt sofort, daß die Schur-Eigenschaft eines Banachraumes X separabel bestimmt ist, d. h. X besitzt diese Eigenschaft genau dann, wenn jeder abgeschlossene separable Teilraum von X sie besitzt.
- 2) Bekanntlich ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Banachraum X genau dann eine Cauchyfolge bzw. schwache Cauchyfolge, wenn für je zwei wachsende Folgen $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Indizes die Folge $(x_{p_m} - x_{q_m})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bzw.

eine schwache Nullfolge ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß X die Schur-Eigenschaft genau dann besitzt, wenn jede schwache Cauchyfolge bereits norm-konvergent ist. Insbesondere ist jeder Banachraum mit Schur-Eigenschaft schwach-folgenvollständig.

Nach J. Howard [1] heißen ein Banachraum X fastreflexiv, wenn jede beschränkte Folge in X eine schwache Cauchy-Teilfolge enthält, und ein stetiger, linearer Operator T von einem Banachraum Y nach X ein schwacher Cauchy-Operator, wenn T beschränkte Folgen in Folgen transformiert, die eine schwache Cauchy-Teilfolge enthalten.

H. P. Rosenthal [1] und L. Dor [1] gaben folgende Charakterisierung fastreflexiver Banachräume:

(4.1.10) Satz (H.P. Rosenthal [1] - L. Dor [1])

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X ist fastreflexiv.
- 2) Kein Teilraum von X ist isomorph zu $l_1(\mathbb{N})$.

Bezeichnet $wC(Y, X)$ die schwachen Cauchy-Operatoren von einem Banachraum Y in einen Banachraum X , dann erhalten wir mit Bemerkung (4.1.9) sofort folgendes Korollar zu Satz (4.1.8):

(4.1.11) Korollar

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) $wC(Y, X) = K(Y, X)$ für alle Banachräume Y .

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Diese Implikation ergibt sich unmittelbar aus der Definition von schwachen Cauchy-Operatoren und aus Bemerkung (4.1.9).

2) $\Rightarrow$ 1) Aus $W(Y, X) \subset wC(Y, X)$ folgt die Behauptung sofort mit Satz (4.1.8).

J. Howard [1] zeigt, daß Banachräume X mit der Eigenschaft, daß X oder X' die Dunford-Pettis-Eigenschaft besitzen und X' fastreflexiv ist, auch die Schur-Eigenschaft besitzen. Mit H. P. Rosenthals Charakterisierung (4.1.10) fastreflexiver Banachräume erhält man folgende Verschärfung dieses Resultats:

(4.1.12) Korollar

- 1) Sei X ein Banachraum, so daß X' fastreflexiv ist.
Besitzen X oder X' die Dunford-Pettis-Eigenschaft, dann ist X endlich-dimensional.
- 2) Besitzt ein unendlich-dimensionaler Banachraum X die Dunford-Pettis-Eigenschaft, so enthält X' einen zu $l_1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum.

Beweis:

Fastreflexivität vererbt sich auf den Prädual:

X' ist nach Satz (4.1.10) genau dann fastreflexiv, wenn X' keinen zu $l_1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum enthält. Dann enthält nach A. Pelczyński [2] auch X keinen zu $l_1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum, ist also fastreflexiv.

Nach J. Howard [1] besitzt X die Schur-Eigenschaft. Unendlich-dimensionale Banachräume mit Schur-Eigenschaft enthalten wieder

nach Satz (4.1.10) und nach Bemerkung (4.1.9) aber $l_1(\mathbb{N})$ isomorph. Damit ist 1) gezeigt; 2) folgt unmittelbar.

Für Banachräume X und Y untersucht H. Fakhoury [1] den Raum $M(Y, X)$ aller stetigen, linearen Operatoren $T : Y \rightarrow X$, die durch einen fastreflexiven Banachraum faktorisiert sind. Er erhält folgendes Ergebnis:

(4.1.13) Satz (H. Fakhoury [1])

Sind X und Y Banachräume und $T \in L(Y, X)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) $T \in M(Y, X)$.
- 2) $T \in wC(Y, X)$.
- 3) T ist l_1 -singulär ⁷⁾.

Bezeichnen wir mit $l_1\text{-sing}(Y, X)$ die l_1 -singulären Operatoren von Y nach X , so erhalten wir als Korollar zu Satz (4.1.8) wieder eine Charakterisierung der Banachräume mit Schur-Eigenschaft:

(4.1.14) Korollar

Für jeden Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) $M(Y, X) = K(Y, X) = l_1\text{-sing}(Y, X)$ für alle Banachräume Y .

Beweis:

Die Behauptungen folgen sofort aus Satz (4.1.8), Korollar (4.1.11) und Satz (4.1.13).

⁷⁾ $T \in L(Y, X)$ heißt l_1 -singulär, wenn kein Teilraum Z von Y existiert, so daß Z isomorph zu $l_1(\mathbb{N})$ und $T|_Z$ ein Isomorphismus ist.

4.2. Charakterisierungen der Dualräume und Bidualräume mit Schur-Eigenschaft und einige Folgerungen

In diesem Abschnitt wenden wir die in Satz (4.1.8) gegebene Charakterisierung der Banachräume mit Schur-Eigenschaft auf Dualräume, Bidualräume und fastreflexive Räume an.

Zunächst geben wir eine Charakterisierung der Dualräume mit Schur-Eigenschaft. Mit Hilfe des Satzes (4.1.10) von H. P. Rosenthal [1] und L. Dor [1] folgern wir hieraus eine bereits bekannte Charakterisierung dieser Räume von H. Fakhoury [1] und P. Pethe - N. Thakare [1]. Als weitere Folgerung zeigen wir, daß es keine unendlich-dimensionalen Bidualräume mit Schur-Eigenschaft gibt. Wir schließen mit einigen Beispielen, und zeigen insbesondere die in Kapitel 0 behaupteten Tatsachen, daß $c_0(\mathbb{N})$, $C([0,1])$ und $L^1([0,1])$ nicht isomorph einem Dualraum sind, durch Anwendung der hier erhaltenen Charakterisierungen von Banachräumen mit Schur-Eigenschaft.

(4.2.1) Satz

Ein Banachraum X sei isomorph zu einem Dualraum Y' . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) $W(Y,Z) = K(Y,Z)$ für jeden Banachraum Z .
- 3) $L(Y,R) = K(Y,R)$ für jeden reflexiven Banachraum R .

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Ist Z ein Banachraum und $T \in W(Y,Z)$, so ist nach einem Satz von V. Gantmacher [1] der adjungierte Operator $T^* \in W(Z',Y')$. Nach Satz (4.1.8) ist dann $T^* \in K(Z',Y')$. Nach einem Satz von J. Schauder [1] ist dann $T \in K(Y,Z)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Diese Implikation folgt sofort aus der Tatsache, daß jeder stetige Operator in einen reflexiven Raum schwach-kompakt ist.

3) $\Rightarrow$ 1) Sei R ein reflexiver Banachraum. Ist $T \in L(R, Y')$, dann ist $T^*|_Y \in L(Y, R')$, also $T^*|_Y \in K(Y, R')$ nach Voraussetzung. Dann ist nach dem Satz von J. Schauder [1] aber $(T^*|_Y)^* = T \in K(R, Y')$, da R reflexiv ist. Mit Satz (4.1.8) folgt dann die Behauptung.

(4.2.2) Korollar (H. Fakhoury [1], P. Pethe- N. Thakare [1])

X sei isomorph zu einem Dualraum Y' .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) X besitzt die Schur-Eigenschaft.
- 2) Y ist fastreflexiv und besitzt die Dunford-Pettis-Eigenschaft.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2) Besitzen X und somit Y' die Schur-Eigenschaft, so besitzt Y nach Satz (4.2.1) die Dunford-Pettis-Eigenschaft – nach der erwähnten Charakterisierung (4.1.5) dieser Eigenschaft von A. Grothendieck [2]. Enthielte Y einen zu $l_1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum, so wäre nach A. Pelczynski [2] $l^1([0,1])$ isomorph in Y' enthalten, was aber der Schur-Eigenschaft von Y' widerspricht. Also ist Y nach Satz (4.1.10) fastreflexiv.

2) $\Rightarrow$ 1) Seien Z ein Banachraum und $T \in W(Y, Z)$. Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in Y , so existiert nach Satz (4.1.10) eine schwache Cauchy-Teilfolge $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, da Y fastreflexiv ist. Da Y die Dunford-Pettis-Eigenschaft besitzt, ist nach

S. Simons [1] $(Ty_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ norm-konvergent. Also folgt mit Satz (4.2.1) die Behauptung.

(4.2.3) Korollar

- 1) Jeder Banachraum X mit Schur-Eigenschaft, der isomorph zu einem Bidualraum ist, ist endlich-dimensional.
- 2) Jeder reflexive oder quasi-reflexive Banachraum mit Schur-Eigenschaft ist endlich-dimensional.

Beweis:

- 1) Besitzt der Bidualraum Y'' eines Banachraumes Y die Schur-Eigenschaft, so besitzt sie auch Y . Nimmt man Y unendlich-dimensional an, dann enthält Y wieder nach Satz (4.1.10) einen Teilraum Z , der isomorph zu $l_1(\mathbb{N})$ ist. Dann ist aber $Y' / Z^\perp$ isomorph zu $l_\infty(\mathbb{N})$, also enthält dann Y'' einen Teilraum W , der isomorph zu $l_\infty(\mathbb{N})'$ ist. Dann aber wäre $L^1([0,1])$ einem Teilraum von Y'' isomorph, da $l_\infty(\mathbb{N})$ isomorph zu $L^\infty([0,1])$ ist. Dies aber widerspricht der Schur-Eigenschaft von Y'' .
- 2) folgt unmittelbar aus 1).

(4.2.4) Folgerungen

- 1) H. P. Rosenthal [2] zeigt, daß $l_\infty(A)$ keinen Prädual der Ordnung 3 besitzt, unter der Bedingung $\aleph_0 \leq \text{card}(A) < 2^{\aleph_0}$. T.E. Armstrong [1], (Prop. 2) erhält mit maßtheoretischen Hilfsmitteln, daß $l_1(A)$ nicht isomorph einem Bidualraum ist für jede unendliche Menge A , womit er den obigen Satz von Rosenthal verschärft.

Wir erhalten das Ergebnis von T. E. Armstrong [1] sofort aus Korollar (4.2.3) mit der bekannten Tatsache, daß $l_1(A)$ die Schur-Eigenschaft besitzt.

- 2) H. Fakhoury [1], (Cor. 17), erhält folgendes Ergebnis:
Sind X und Y fastreflexive Banachräume, so daß Y die Dunford-Pettis-Eigenschaft besitzt und X' ein Quotient von Y ist, dann besitzt X' die Schur-Eigenschaft. Wir erhalten mit Korollar (4.2.3) folgendes verschärfte Resultat:

(4.2.5) Korollar

Seien X und Y fastreflexive Banachräume, so daß Y die Dunford-Pettis-Eigenschaft besitzt und X' ein Quotient von Y ist. Dann ist X endlich-dimensional.

Beweis:

Unter den gegebenen Voraussetzungen besitzt Y' nach Korollar (4.2.2) die Schur-Eigenschaft. Ist Z ein Teilraum von Y , so daß X' isomorph zu Y/Z ist, dann ist X'' isomorph zu $Z^\perp$. Also besitzt X'' die Schur-Eigenschaft, und somit ist X nach Korollar (4.2.3) endlich-dimensional.

Schließlich ergibt sich aus der Charakterisierung der Dualräume mit Schur-Eigenschaft sofort:

(4.2.6) Korollar (A. Grothendieck [2], A. Pelczynski [3])

Besitzt ein Banachraum X die Dunford-Pettis-Eigenschaft, und ist X' separabel, dann besitzt X' die Schur-Eigenschaft.

Beweis:

Ist X' separabel, dann ist X fastreflexiv.

Als Folgerungen ergeben sich jetzt sofort folgende in Kapitel 0 behaupteten Tatsachen, die man in den bekannten Arbeiten von R. S. Phillips [1], J. Dieudonné [1], I. M. Gelfand [1], J. Dixmier [2], A. Pelczynski [2] - [3] findet, wo sie mit anderen Methoden bewiesen werden:

(4.2.7) Korollar

- 1) $c_0(\mathbb{N})$ ist nicht isomorph zu einem Dualraum.
- 2) $C([0,1])$ ist nicht isomorph zu einem Dualraum.
- 3) $L^1([0,1])$ ist nicht isomorph zu einem Dualraum.
- 4) $l_1([0,1])$ ist nicht isomorph zu $C([0,1])'$.

Beweis:

Nach A. Grothendieck [2] besitzen $c_0(\mathbb{N})$, $C([0,1])$ und $L^1([0,1])$ die Dunford-Pettis-Eigenschaft. Keiner dieser separablen Banachräume besitzt aber die Schur-Eigenschaft; sie können daher nach Korollar (4.2.6) nicht isomorph zu Dualräumen sein.

Da $l_1([0,1])$ die Schur-Eigenschaft besitzt, kann dieser Raum nicht isomorph dem Dualraum von $C([0,1])$ sein. Denn sonst wäre $C([0,1])$ nach Korollar (4.2.2) fastreflexiv, was aber der Universalität von $C([0,1])$ für separable Banachräume widerspricht.

Wir schließen mit einigen weiteren Bemerkungen:

(4.2.8) Korollar

- 1) Ist ein unendlich-dimensionaler Banachraum X schwach-folgendvollständig, dann besitzt X' nicht die Schur-Eigenschaft.

Insbesondere gelten für unendlich-dimensionale Banachräume X :

- i) Besitzt X die Schur-Eigenschaft, dann besitzt sie X' nicht.
 - ii) Besitzt X' die Schur-Eigenschaft, dann besitzt sie X nicht.
- 2) Jeder abstrakte M -Raum mit Schur-Eigenschaft ist endlich-dimensional.
 - 3) Jeder abstrakte L -Raum X mit Schur-Eigenschaft ist isomorph zu $l_1(A)$ für eine geeignete Menge A . Ist X separabel und unendlich-dimensional, so ist X isomorph zu $l_1(\mathbb{N})$.

Beweis:

- 1) Besitzt X' die Schur-Eigenschaft, dann ist nach Korollar (4.2.2) und Satz (4.1.10) X reflexiv, wenn X schwach-folgenvollständig ist. Dann ist aber nach Korollar (4.2.3) X endlich-dimensional.
 - 2) Sei X ein abstrakter M -Raum mit Schur-Eigenschaft. Nach A. Grothendieck [2] ist jeder stetige, lineare Operator von einem M -Raum in einen schwach-folgenvollständigen Banachraum schwach-kompakt. Nach Satz (4.1.8) und Bemerkung (4.1.9) ist dann die Identität auf X ein kompakter Operator. Also ist X endlich-dimensional.
 - 3) X ist isomorph zu $(l_1(A) \oplus (\sum_{\gamma \in \Gamma} \oplus L^1([0,1]^{m_\gamma}))_1)_1$ für eine geeignete Menge A und eine Menge von Kardinalzahlen $m_\gamma \geq \aleph_0$, wie z.B. in H. E. Lacey [1], S. 136 gezeigt wird.
- X besitze die Schur-Eigenschaft. Da $L^1([0,1])$ Teilraum

von $L^1([0,1]^{m_Y})$ für alle $m_Y \geq \aleph_0$ ist und sich die Schur-Eigenschaft auf Teilräume vererbt, muß $\Gamma = \emptyset$ sein. Denn sonst hätte $L^1([0,1])$ die Schur-Eigenschaft. Also ist X isomorph zu $l_1(A)$ für eine geeignete Menge A .

Ist X unendlich-dimensional, separabel, dann muß A abzählbar unendlich sein. Dann ist X isomorph zu $l_1(\mathbb{N})$.

Anhang 1

Banach-Mazur-Zahlen für duale und bidual Banachräume

Wir führen die Banach-Mazur-Zahl $d(X)$ eines dualen Banachraumes X ein als Banach-Mazur-Abstand von X zur Klasse der Banachräume, die isometrisch zu einem Dualraum sind.

1. Definition

- a) Ein dualer Banachraum ist ein Banachraum, welcher isomorph zum Dualraum eines Banachraumes ist.
- b) Die Banach-Mazur-Zahl $d(X)$ eines dualen Banachraumes X sei definiert durch

$$d(X) := \inf \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| : \begin{array}{l} T \in I(X, Y'), Y \text{ beliebiger Banachraum} \\ \text{mit } I(X, Y') \neq \emptyset \end{array} \right\}.$$

Hierbei bezeichne $I(X, Y')$ die Menge der Isomorphismen von X auf Y' .

2. Bemerkungen

- a) Ist ein Banachraum X isometrisch zu einem Dualraum, dann gilt $d(X) = 1$.
- b) Es gibt Banachräume X , die isomorph zu einem Dualraum, aber nicht isometrisch zu einem Dualraum sind. Ein erstes Beispiel stammt von V. L. Klee [1], der eine äquivalente Norm $\|\cdot\|$ auf l_∞ angibt, so daß $(l_\infty, \|\cdot\|)$ nicht isometrisch zu einem Dualraum ist. Aber $(l_\infty, \|\cdot\|)$ ist isomorph zu c_0 . Allgemeiner zeigen W. J. Davis - W. B. Johnson [1], daß jeder nicht-reflexive Banachraum eine äquivalente Norm besitzt, mit welcher er nicht isometrisch zu einem Dualraum ist. Diese Tatsache folgt aufgrund von Korollar (0.2.3) auch aus einem Ergebnis von D. van Dulst - I. Singer [1], die

gezeigt haben, daß jeder nicht-reflexive Banachraum X eine äquivalente Norm $\|\cdot\|$ besitzt, so daß es keine stetige Projektion P von $(X, \|\cdot\|)''$ auf $(X, \|\cdot\|)$ mit $\|P\| = 1$ gibt.

Es entsteht die Frage, ob sich die Banach-Mazur-Zahl eines dualen Banachraumes X anhand von X allein, oder wenigstens mittels X, X' und X'' beschreiben läßt. Im folgenden Satz wird gezeigt, daß dieses möglich ist. Hierfür ist Satz (0.2.2) grundlegend, wonach jeder duale Banachraum X in seinem Bidualraum X'' zu einem schwach*-abgeschlossenen Teilraum komplementiert ist. Die Normen der zugehörigen stetigen Projektionen ermöglichen es, die Banach-Mazur-Zahl $d(X)$ wie folgt zu bestimmen:

3. Satz

Die Banach-Mazur-Zahl $d(X)$ eines dualen Banachraumes X ist gegeben durch

$$d(X) = \inf \left\{ \|P\| : \begin{array}{l} P \text{ stetige Projektion von } X'' \text{ auf } X \\ \text{mit } \sigma(X'', X')\text{-abgeschlossenem Kern} \end{array} \right\}$$

Beweis:

Es genügt die Äquivalenz folgender Aussagen zu zeigen:

- i) Es gibt einen Banachraum Y und einen Isomorphismus $T \in I(X, Y')$ mit $\|T\| \|T^{-1}\| \leq r$.
- ii) Es gibt eine stetige Projektion P von X'' auf das kanonische Bild von X in X'' mit $\sigma(X'', X')$ -abgeschlossenem Kern und $\|P\| \leq r$.

Wir zeigen i) $\Rightarrow$ ii):

Sind Y ein Banachraum, $T \in I(X, Y')$ ein Isomorphismus

mit $\|T\| \|T^{-1}\| \leq r$ und $V := T^*(J_{Y, Y''}(Y))$, so ist nach Lemma (1.2.1)

X kanonisch isomorph zu V' , und für den kanonischen Isomorphis-

mus $J_{X, V'}$ gilt:

$$J_{X, V'}^{-1} = T^{-1} \circ R \text{ mit } R \in I(V', Y'), R = (T^* \circ J_{Y, Y''})^*.$$

Ist dann $P := J_{X, X'} \circ J_{X, V'}^{-1} \circ S$ mit $S: X'' \rightarrow V'$, so ist P die stetige

$$F \xrightarrow{\quad} F|_V$$

Projektion von X'' auf $J_{X, X''}(X)$ mit $P^{-1}(0) = V^\perp$,

und es gilt $\|P\| \leq \|J_{X, V'}^{-1}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| \leq r$.

Die Implikation von ii) auf i) folgt unmittelbar aus Lemma (1.1.7),

wenn $V := P^{-1}(0)_\perp$ gesetzt wird.

4. Korollar

Für einen dualen Banachraum X bezeichne K_X die Menge der

$\sigma(X'', X')$ -abgeschlossenen Teilräume W von X'' , welche komplementiert zum kanonischen Bild von X in X'' sind. Dann ist die Banach-

Mazur-Zahl $d(X)$ gegeben durch:

$$d(X) = \inf \{ \text{char } (W_\perp)^{-1} : W \in K_X \}.$$

Beweis:

Ist P stetige Projektion von X'' auf $J_{X, X''}(X)$ mit $P^{-1}(0) \in K_X$

und $\|P\| \leq r$, so ist nach Lemma (1.1.7) $\text{char } (P^{-1}(0)_\perp) \geq \frac{1}{r}$.

Sind andererseits $W \in K_X$ mit $\text{char } (W_\perp) \geq \frac{1}{r}$ und Q die stetige

Projektion von X'' auf $J_{X, X''}(X)$ mit $Q^{-1}(0) = W$, dann ist nach

Lemma (1.1.7) und Satz (1.1.6) $\|Q\| \leq r$.

5. Bemerkung

Nach einer Bemerkung von D. van Dulst und I. Singer [1]

existiert zu jeder äquivalenten Norm $\|\cdot\|$ auf einem quasi-

reflexiven Raum X der Ordnung 1 und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Projek-

tion P von $(X, \|\cdot\|)$ auf $(X, \|\cdot\|)$ mit $\|P\| < 2 + \varepsilon$.

Also ist für jeden quasi-reflexiven Banachraum X der Ordnung 1 die Banach-Mazur-Zahl $d(X) \leq 2$.

Für biduale Banachräume X definieren wir analog eine weitere Banach-Mazur-Zahl $b(X)$:

6. Definition

a) Ein bidualer Banachraum ist ein Banachraum, welcher isomorph zum Bidualraum eines Banachraumes ist.

b) Die Banach-Mazur-Zahl $b(X)$ eines bidualen Banachraumes X sei definiert durch

$$b(X) = \inf \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| : \begin{array}{l} T \in I(X, Y''), Y \text{ beliebiger Banachraum} \\ \text{mit } I(X, Y'') \neq 0. \end{array} \right\}.$$

7. Bemerkungen

a) Ist ein Banachraum X isometrisch zu einem Bidualraum, dann ist $b(X) = d(X) = 1$.

b) Für einen bidualen Banachraum X gilt immer $d(X) \leq b(X)$.

Auf der Suche nach einem Analogon zu Satz 3 ergab sich folgende Abschätzung für die Banach-Mazur-Zahl $b(X)$ eines bidualen Banachraumes X :

Satz

Für die Banach-Mazur-Zahl $b(X)$ eines bidualen Banachraumes X gilt:

$$b(X) \leq \inf \left\{ \|P\| \|Q\| : \begin{array}{l} P \text{ stetige Projektion von } X'' \text{ auf } J_{X, X''}(X) \\ \text{mit } P^{-1}(0) \text{ } \sigma(X'', X')\text{-abgeschlossen} \\ Q \text{ stetige Projektion von } X' \text{ auf } P^{-1}(0)_{\perp}, \\ Q^{-1}(0) \text{ } \sigma(X', X)\text{-abgeschlossen} \end{array} \right\}.$$

Beweis:

Ist X isomorph zu einem Bidualraum, so existieren nach Satz (1.2.2) und Satz (2.1.5) abgeschlossene Teilräume $V \subseteq X'$ und $E \subseteq X$, so daß $X'' = J_{X, X''}(X) \oplus V^\perp$ und $X' = V \oplus E^\perp$. Bezeichne P die Projektion von X'' auf $J_{X, X''}(X)$ mit $P^{-1}(0) = V^\perp$ und Q die Projektion von X' auf V mit $Q^{-1}(0) = E^\perp$, so erhält man aus Lemma (1.1.7) und Lemma (1.2.1) unmittelbar $b(X) \leq \|P\| \|Q\|$.

Anhang 2

Einige offene Probleme über duale und bidual Banachräume

In Kapitel 2 haben wir reelle, separable Dualräume durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft charakterisiert.

Es entsteht die Frage, ob sich analog auch separable Dualräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen durch die verallgemeinerte Banach-Saks-Eigenschaft charakterisieren lassen.

Wie der Beweis von Satz (2.1.6) zeigt, hängt die Antwort von der Lösung des folgenden Problems ab:

Problem 1 Seien X ein komplexer, separabler Banachraum und V ein abgeschlossener, totaler Teilraum von X' mit positiver Charakteristik. Ist dann X vollständig bzgl. der Mackey-Topologie des Dualsystems (X, V) ?

Jeder unendlich-dimensionale Banachraum X mit Schur-Eigenschaft enthält $l_1(\mathbb{N})$ hereditär, d.h. jeder unendlich-dimensionale Teilraum von X enthält einen zu $l_1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum. J. Bourgain [1] gibt einen Banachraum an, der $l_1(\mathbb{N})$ hereditär enthält, jedoch nicht schwach-folgendvollständig ist. Dieser Raum kann nach Bemerkung (4.1.8) nicht die Schur-Eigenschaft besitzen.

Problem 2 Besitzt ein Banachraum, welcher $l_1(\mathbb{N})$ hereditär enthält und schwach-folgendvollständig ist, die Schur-Eigenschaft?

J. Lindenstrauss und R. Phelps [1] untersuchten Banachräume, deren duale Einheitskugel abzählbar viele Extrempunkte besitzt. Sie erhielten folgendes Ergebnis:

Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum, dessen duale Einheitskugel $b_1(X')$ abzählbar viele Extrempunkte besitzt. Dann ist X' separabel und X enthält keinen unendlich-dimensionalen, reflexiven Teilraum.

Problem 3 Hat ein Banachraum X , der keinen unendlich-dimensionalen, reflexiven Teilraum enthält, und dessen Dualraum X' separabel ist, die Dunford-Pettis-Eigenschaft?

Bemerkungen

- a) Nach den Ergebnissen von Kapitel 4 besitzt ein Banachraum X , welcher die Voraussetzungen des Satzes von Lindenstrauss und Phelps erfüllt, die Dunford-Pettis-Eigenschaft genau dann, wenn sein Dualraum X' die Schur-Eigenschaft besitzt.
- b) Für unendlich-dimensionale Banachräume X mit separablem Bidualraum X'' haben W. B. Johnson und H.P. Rosenthal [1] gezeigt, daß sowohl X als auch X' unendlich-dimensionale, reflexive Teilräume enthalten. Die Einheitskugel eines unendlich-dimensionalen, separablen Bidualraumes besitzt also überabzählbar viele Extrempunkte.
- Da für jeden Banachraum X , welcher die Voraussetzungen des Satzes von J. Lindenstrauss und R. Phelps erfüllt, auch jeder Teilraum von X diese Voraussetzungen erfüllt, enthält X keinen unendlich-dimensionalen Dualraum.

Problem 3' Hat ein Banachraum X , der keinen unendlich-dimensionalen Dualraum enthält, und dessen Dualraum X' separabel ist, die Dunford-Pettis-Eigenschaft?

In Anhang 1 haben wir die Banach-Mazur-Zahlen $d(X)$ und $b(X)$ für duale bzw. biduale Banachräume X eingeführt.

Im Anschluß an die Bemerkungen 2a und 7a in Anhang 1 ergeben sich die beiden folgenden Fragen:

Problem 4 Folgt für einen dualen Banachraum X aus $d(X) = 1$, daß X isometrisch zu einem Dualraum ist?

Problem 4' Folgt für einen bidualen Banachraum X aus $b(X) = 1$, daß X isometrisch zu einem Bidualraum ist?

Im Anschluß an Bemerkung 2b in Anhang 1 ergibt sich folgendes Problem:

Problem 5 Für einen dualen Banachraum X sei $d(X) = 1$ für jede äquivalente Norm auf X . Ist dann X reflexiv?

Schließlich ergibt sich aus Satz 8 in Anhang 1 folgende Frage:

Problem 6 Gilt für einen bidualen Banachraum X

$$b(X) = \inf \left\{ \|P\| \|Q\| : \begin{array}{l} P \text{ stetige Projektion von } X'' \text{ auf } X \\ \text{mit } P^{-1}(0) \sigma(X'', X')\text{-abgeschlossen,} \\ Q \text{ stetige Projektion von } X' \text{ auf } P^{-1}(0)_{\perp} \\ Q^{-1}(0) \sigma(X', X)\text{-abgeschlossen} \end{array} \right\} ?$$

Anhang 3

Ergänzende Hinweise

Nach Abschluß dieser Arbeit hat mich Professor I. Singer auf die Arbeiten von B. V. Godun aufmerksam gemacht.

Als Ergänzung sei daher das folgende Ergebnis von B. V. Godun [1] angefügt, durch welches insbesondere unser Problem 5 aus Anhang 2 gelöst wird:

Satz (B. V. Godun [1])

Sei X ein nicht-reflexiver Banachraum. Dann existiert eine äquivalente Norm $||| \cdot |||$ auf X , so daß $d((X, ||| \cdot |||), Y') \geq 2$ für jeden Banachraum Y ist.

Insbesondere ist also ein dualer Banachraum X reflexiv, wenn seine Banach-Mazur-Zahl $d(X) = 1$ für jede äquivalente Norm ist.

Literaturverzeichnis

L. Alaoglu [1]

Weak topologies of normed linear spaces

Ann. of Math., 41 (1940), 252-267

T. E. Armstrong [1]

Infinite dimensional L-spaces do not have
preduals of all orders.

Proc. AMS, 74 (1979), 285-290

A. Baernstein II [1]

On reflexivity and summability

Studia Math., 42 (1972), 91-94

S. Banach - S. Saks [1]

Sur la convergence forte dans les champs L^p

Studia Math., 2 (1930), 51-54

E. Bishop - R. Phelps [1]

A proof that every Banach space is subreflexive

Bull. AMS, 67 (1961), 97-98

J. Bourgain

Remarks on the double dual of a Banach space

Bull. Soc. Math. Belgique, ser. B, 32 (1980), 171-178

J. Bourgain - F. Delbaen [1]

A special class of L_∞ spaces

Preprint

N. P. Cac [1]

Spaces of mappings as sequence spaces

Tohoku Math. J., 22 (1970), 379-393

P. Civin - B. Yood [1]

Quasi-reflexive Banach spaces

Proc. AMS, 8 (1957), 906-911

G. Crofts [1]

Dual and bidual locally convex spaces

Rocky Mountains J. of Math., 2 (1972), 611-618

W.J.Davis - T.Figiel - W.B.Johnson - A. Pelczynski [1]

Factoring weakly compact operators

J. Functional Analysis, 17 (1974), 311-327

W.J.Davis - W.B.Johnson [1]

A renorming of non-reflexive Banach spaces

Proc. AMS, 37 (1973), 486-489

W.J.Davis - J.Lindenstrauss [1]

On total non-norming subspaces

Proc. AMS, 31 (1972), 108-111

C. De Vito [1]

A completeness theorem for locally convex spaces and some applications

Math. Ann., 177 (1968), 221-229

J. Diestel [1]

Geometry of Banach spaces

Lect. Notes in Math. 485, Springer-Verlag

J. Dieudonné [1]

Sur les espaces L^1

Arch. Math., 10 (1959), 151-152

J. Dixmier [1]

Sur un théorème de Banach

Duke Math. J., 15 (1948), 1057-1071

J. Dixmier [2]

Sur certain espaces considérés par M.H.Stone

Summa Brasil. Math., 2 (1951), 151-182

L. Dor [1]

On sequences spanning a complex l^1 space

Proc. AMS, 47 (1975), 515-516

D. van Dulst [1]

Reflexive and super-reflexive Banach spaces

Math. Centre Tracts, 102 (1978)

Math. Centrum, Amsterdam

D. van Dulst - I. Singer [1]

On Kadec-Klee norms on Banach spaces

Studia Math., 54 (1976), 205-211

W. F. Eberlein [1]

Weak compactness in Banach spaces

Proc. N.A.S. USA, 33 (1947), 51-53

H. Fakhoury [1]

Sur les espaces de Banach ne contenant pas $l_1(\mathbb{N})$

Math. Scand., 41 (1977), 277-289

V. Gantmacher [1]

Über schwach totalstetige Operatoren

Mat. Sbornik N.S., 7 (49), (1940), 301-308

I. M. Gelfand [1]

Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren

Mat. Sbornik, 4 (1938), 235-286

B. V. Godun [1]

Equivalent norms on nonreflexive spaces

Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 1180-1183

A. Grothendieck [1]

Critères de compacité dans les espaces
fonctionnels généraux

Amer. J. Math., 74 (1952), 168-186

A. Grothendieck [2]

Sur les applications linéaires faiblement compact d'espaces du type $C(K)$

Canadian J. Math., 5 (1953), 129-173

J. Hagler - F. Sullivan [1]

Smoothness and weak* sequential compactness

Proc. AMS, 78 (1980), 497-503

J. Hennefeld [1]

$L(X)$ as a subalgebra of $K(X)^{**}$

Illinois J. Math., 23 (1979), 681-686

R. B. Holmes [1]

Geometric Functional Analysis and its Applications

Graduate Texts in Math., 24 (1975), Springer-Verlag

J. R. Holub [1]

Reflexivity of $L(E, F)$

Proc. AMS, 39 (1973), 175-177

J. Howard [1]

A generalization of reflexive Banach spaces and weakly compact operators

Comment. Math. Univ. Carolinae, 13.4 (1972), 673-684

R. C. James [1]

A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space

Proc. N.A.S. USA, 37 (1951), 174-177

R. C. James [2]

Characterizations of Reflexivity

Studia Math., 23 (1964), 205-216

R. C. James [3]

Weakly compact sets

Trans. AMS, 113 (1964), 129-140

W. B. Johnson - H. P. Rosenthal [1]

On w^* -basic sequences and their applications to the study of Banach spaces

Studia Math., 48 (1972), 77-92

S. Kakutani [1]

Weak convergence in uniformly convex spaces

Tohoku Math. J., 45 (1938), 188-193

V. L. Klee [1]

Some characterizations of reflexivity

Revista Ci. Lima, 52 (1950), 15-23

Kung Fu Ng [1]

On a theorem of Dixmier

Math. Scand., 29 (1971), 279-280

H. E. Bacey [1]

The isometric theory of classical Banach spaces

Die Grundlehren der math. Wissensch. in

Einzel Darstellungen, 208 (1974),

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

I. Leonard [1]

Banach sequence spaces

J. Math. Analysis and Appl., 54 (1976), 245-265

J. Lindenstrauss - R. Phelps [1]

Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces

Israel J. Math., 6 (1968), 39-48

J. Lindenstrauss - L. Tzafriri [1]

Classical Banach spaces

Lect. Notes in Math., 338, Springer-Verlag

R. Lohmann - P. Cassaza [1]

A general construction of spaces of the type of R. C. James

Canad. J. Math., 27 (1975), 1263-1270

S. Mazur [1]

Über konvexe Mengen in linearen, normierten Räumen
Studia Math., 4 (1933), 70-84

D. P. Milman [1]

On some criteria for the regularity of spaces
of the type (B).

Doklady Akad. Nauk. SSSR(N.S.), 20 (1938), 243-246

T. Nishiura - D. Waterman [1]

Reflexivity and Summability

Studia Math., 23 (1963), 53-57

A. Pelczynski [1]

A remark on the preceding paper of I. Singer

Studia Math., 26 (1965), 115-116

A. Pelczynski [2]

On Banach spaces containing $L^1(\mu)$

Studia Math., 30 (1968), 231-246

A. Pelczynski [3]

Uncomplemented function algebras with
separable annihilators

Duke J. Math., 33 (1966), 605-612

P. Pethe - N. Thakare [1]

Note on Dunford-Pettis-Property and Schur-Property

Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 91-92

R. S. Phillips [1]

On linear transformations

Trans.AMS, 48 (1940), 516-541

H. P. Rosenthal [1]

A characterization of Banach spaces containing l_1

Proc. N.A.S. USA, 71 (1974), 2411-2413

H. P. Rosenthal [2]

On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$
for finite measures μ .

Acta Math., 124 (1970), 205-248

W. H. Ruckle [1]

Reflexivity of $L(E, F)$

Proc. AMS, 34 (1972), 171-174

A. F. Ruston [1]

On conjugate Banach spaces

Proc. Cambridge Phil. Soc., 53 (1957), 576-580

R. Schatten [1]

A theory of cross spaces

Ann. Math. Studies, Nr. 26,

Princeton University Press, Princeton, 1950

J. Schauder [1]

Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen

Studia Math., 2 (1930), 183-196

J. Schreier [1]

Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz

Studia Math., 2 (1930), 58-62

J. Schur [1]

Über lineare Transformationen in der Theorie der
unendlichen Reihen.

J. Reine Angew. Math., 151 (1921), 79-111

Z. Semadeni [1]

Banach spaces of continuous functions

Warschau, PWN 1971

S. Simons [1]

On the Dunford-Pettis-Property and

Banach spaces that contain c_0

Math. Ann., 216 (1975), 225-231

I. Singer [1]

On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugates
Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.,
Ser. 2 (50) No. 4, (1958), 449-462

I. Singer [2]

On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugate spaces II
Math. Ann., 145 (1962), 64-76

I. Singer [3]

On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugate spaces III.
Acad. R.P.R., Revue Math. Pure Appl., 8 (1963), 139-150

I. Singer [4]

Bases and Quasi-Reflexivity of Banach spaces
Math. Ann., 153 (1964), 199-209

I. Singer [5]

Weak compactness, Pseudo-Reflexivity and Quasi-Reflexivity
Math. Ann., 154 (1964), 77-87

I. Singer [6]

A remark on reflexivity and summability
Studia Math., 26 (1965), 113-114

C. Stegall [1]

Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property
Notices AMS, 19 (7), (1972), A-799, 699-B31

O. Toeplitz [1]

Über allgemeine lineare Mittelbildungen
Prace Math.-Fiz., 22 (1911), 113-119

Lebenslauf

Am 27. Januar 1950 wurde ich als Sohn des kaufm. Angestellten Emanuel Brigola und seiner Ehefrau Katharina, geb. Frey, in Nürnberg geboren.

Von 1956 bis 1960 besuchte ich die Volksschule in Nürnberg und danach das Neue Gymnasium Nürnberg, an welchem ich 1969 die Reifeprüfung ablegte.

Nach Ableistung des Grundwehrdienstes begann ich im Wintersemester 1970/71 das Studium der Werkstoffwissenschaften und Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg. 1973 wechselte ich das Studienfach und studierte Mathematik. Ich besuchte Vorlesungen der Herren Professoren G. Nöbeling, D. Kölzow, K. Jacobs und H. Bauer.

1973 legte ich die Diplom-Vorprüfung und 1977 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik ab.

Am 16. Februar 1979 heiratete ich Ursula Hoppe aus Forchheim.

Seit 15. Dezember 1978 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten im Fachbereich Mathematik der Universität Regensburg am Lehrstuhl von Professor Dr. D. Bierlein tätig und gleichzeitig Doktorand bei Professor Dr. D. Kölzow.

Regensburg, im Juni 1981

Copy - Center 2000
852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197